Libros de Cátedra

# La esfera celeste

Gustavo Baume

e
exactas

FACULTAD DE
CIENCIAS ASTRONÓMICAS Y GEOFÍSICAS



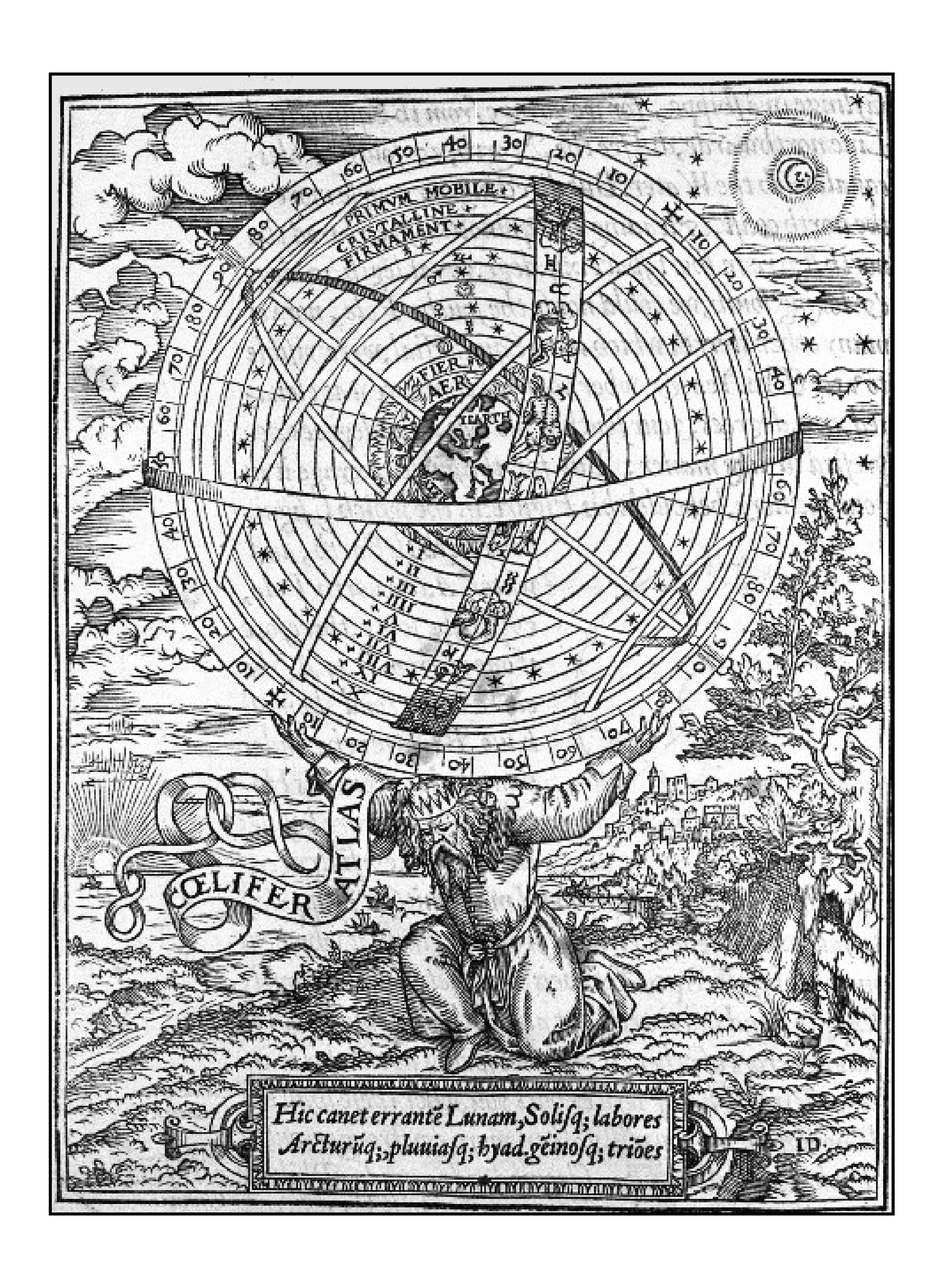



# LA ESFERA CELESTE

*Gustavo Luis Baume*




**2014**


PRIMVM MOBILE
CRISTALLINE
FIRMAMENT
FIER
AER
EARTH
CŒLIFER
ATLAS
Hic canet errantẽ Lunam, Solisq; labores
Arcturũq;, pluuiasq; hyad. gẽinosq; triões
ID.

**Atlas llevando el Mundo en forma de una Esfera Armilar.**
**Representación de William Cunningham aparecida en**
**“The Cosmographicall Glasse”, Londres 1559.**

Detalles de la representación:

La representación anterior se encuentra constituida por diversos elementos que pueden separarse en tres grupos y en una escritura alusiva. Siguiendo este esquema, la descripción de cada grupo sería la que se detalla a continuación:

- En el centro se encuentran los cuatro elementos fundamentales de acuerdo con la antigua ciencia griega: La Tierra, el Agua, el Aire y el Fuego.

- Hacia fuera del grupo anterior se encuentran las distintas esferas celestes asociada cada una con los elementos principales del cielo de acuerdo con la visión y el orden de Ptolomeo en el siglo II D.C.: Luna, Mercurio, Venus, Sol, Marte, Júpiter, Saturno y las estrellas fijas. Luego de las estrellas fijas hay dos esferas adicionales, ideadas en la Edad Media con fines teológicos. También aparece la banda del Zodíaco, junto con el Ecuador Celeste y otros círculos característicos.

- El ambiente que rodea las esferas intenta representar parte de un mito griego: Atlas, por su rebeldía, es condenado por Zeus a soportar el peso de los cielos por toda la eternidad. Sin embargo, según la visión del mundo de Ptolomeo, no debería haber nada fuera de la esfera más externa, salvo la presencia invisible de Dios.

- La escritura al pie son los versos 742 y 744 del Libro I de la Eneida de Virgilio, expresados en Latín Medieval. Ellos son parte del canto de Jopas, alumno de Atlas, en los que describe algunos fenómenos celestes. El canto completo de Jopas, en Latín Clásico, es el siguiente:

*“Hic canit errantem Lunam Solisque labores;*
*unde hominum genus et pecudes; unde imber et ignes;*
*Arcturum pluviasque Hyadas geminosque Triones;*
*quid tantum Oceano properent se tinguere soles*
*hiberni, vel quae tardis mora noctibus obstet.”*

Y una posible traducción sería:

*“Y va cantando las fases de la Luna, los trabajos del Sol,*
*y de dónde proviene la raza de los hombres y los brutos y la lluvia y el fuego.*
*Y canta a Arturo y a las pluviosas Híades, las dos Osas,*
*por qué los soles corren tanto en invierno a bañarse en el mar,*
*o qué tardanza detiene el curso de las largas noches.”*

El presente texto brinda información introductoria vinculada con aspectos referidos al conocimiento general de la Esfera Celeste. Esto es, sus elementos más relevantes, las leyes básicas del movimiento planetario y una breve descripción de algunas constelaciones.

En el texto se presentan inicialmente varios conceptos elementales de geometría y trigonometría plana (2D) y posteriormente se aplican y extienden esos conceptos al espacio (3D). Finalmente, se describen varios conceptos y fenómenos físicos / astronómicos particulares de la esfera celeste.

Se provee información de nivel intermedio, en castellano, de sentido práctico y acorde con la exigida en la currícula universitaria. El contenido se orienta principalmente hacia aquellos estudiantes de los primeros años de una carrera afín como pueden ser: Licenciados en Astronomía, Geofísica o especialización de un Profesorado en Física o Matemáticas. No obstante, la presentación de los temas hace que el texto pueda ser abordado por estudiantes avanzados del nivel secundario con orientación en ciencias.

El texto presentado se basa en una versión previa ya utilizada durante varios años por estudiantes de las carreras de la FCAG (UNLP).

Gustavo Luis Baume

# ÍNDICE

**CAPÍTULO I:**

**Conceptos básicos de la geometría del plano** **4**

1. Introducción
2. La circunferencia
3. Ángulos en el plano
4. Sistema de coordenadas rectangulares en el plano
5. Funciones trigonométricas
6. Triángulos planos

**CAPÍTULO II:**

**Conceptos básicos de la geometría del espacio** **16**

1. Introducción
2. Planos y ángulos en el espacio
3. La esfera
   3.1. Definición y elementos de una esfera
   3.2. Arcos, ángulos y triángulos sobre una esfera
   3.3. Fórmulas básicas de la trigonometría esférica
   3.4. Relación entre círculos máximos y círculos paralelos
   3.5. Coordenadas esféricas
4. El cono y las secciones cónicas
   4.1. Definición y elementos de un cono
   4.2. Las secciones cónicas
5. Resumen de fórmulas

**CAPÍTULO III:**

**La esfera celeste** **37**

1. Elementos de la sup. terrestre y las coordenadas geográficas
2. Definición y elementos de la esfera celeste
3. Situaciones geográficas particulares
   3.1. Primer clasificación
   3.2. Segunda clasificación

**CAPÍTULO IV:**

**Los sistemas astronómicos** **58**

1. Movimientos de los planetas sobre el fondo de las estrellas
   1.1. Sistema geocéntrico
   1.2. Sistema heliocéntrico
2. Las leyes de Kepler y la gravitación universal
   2.1. Las leyes de Kepler
   2.2. La ley de gravitación universal

**CAPÍTULO V:**

**Sistemas de coordenadas celestes** **70**

1. Sistemas de coordenadas celestes
   1.1. Sistema de coordenadas horizontales
   1.2. Sistema de coordenadas ecuatoriales locales
   1.3. Sistema de coordenadas ecuatoriales celestes
   1.4. Sistema de coordenadas ecliptical
   1.5. Sistema de coordenadas galáctico
2. Transformación de sistemas de coordenadas
   2.1. Sistema horizontal - Sistema ecuatorial local
   2.2. Sistema ecuatorial local - Sistema ecuatorial celeste
   2.3. Sistema ecuatorial celeste - Sistema ecliptical
   2.4. Sistema ecuatorial celeste - Sistema galáctico
3. Resumen

**CAPÍTULO VI:**
**Situaciones Particulares de los Astros en la Esfera Celeste** **90**
1. Introducción
2. Culminación de los astros
3. Salida y puesta de un astro
4. Cruce de un astro por el primer vertical
5. Máxima elongación de un astro
6. Resumen

**CAPÍTULO VII:**
**Corrección de las Posiciones Observadas** **104**
1. Introducción
2. Refracción atmosférica
3. Paralaje
   3.1. Paralaje diurna
   3.2. Paralaje anual
   3.3. Paralaje y distancia
4. Aberración
   4.1. Aberración anual
   4.2. Aberración diurna
5. Precesión y nutación
   5.1. Precesión lunisolar
   5.2. Precesión planetaria
   5.3. Nutación
6. Resumen

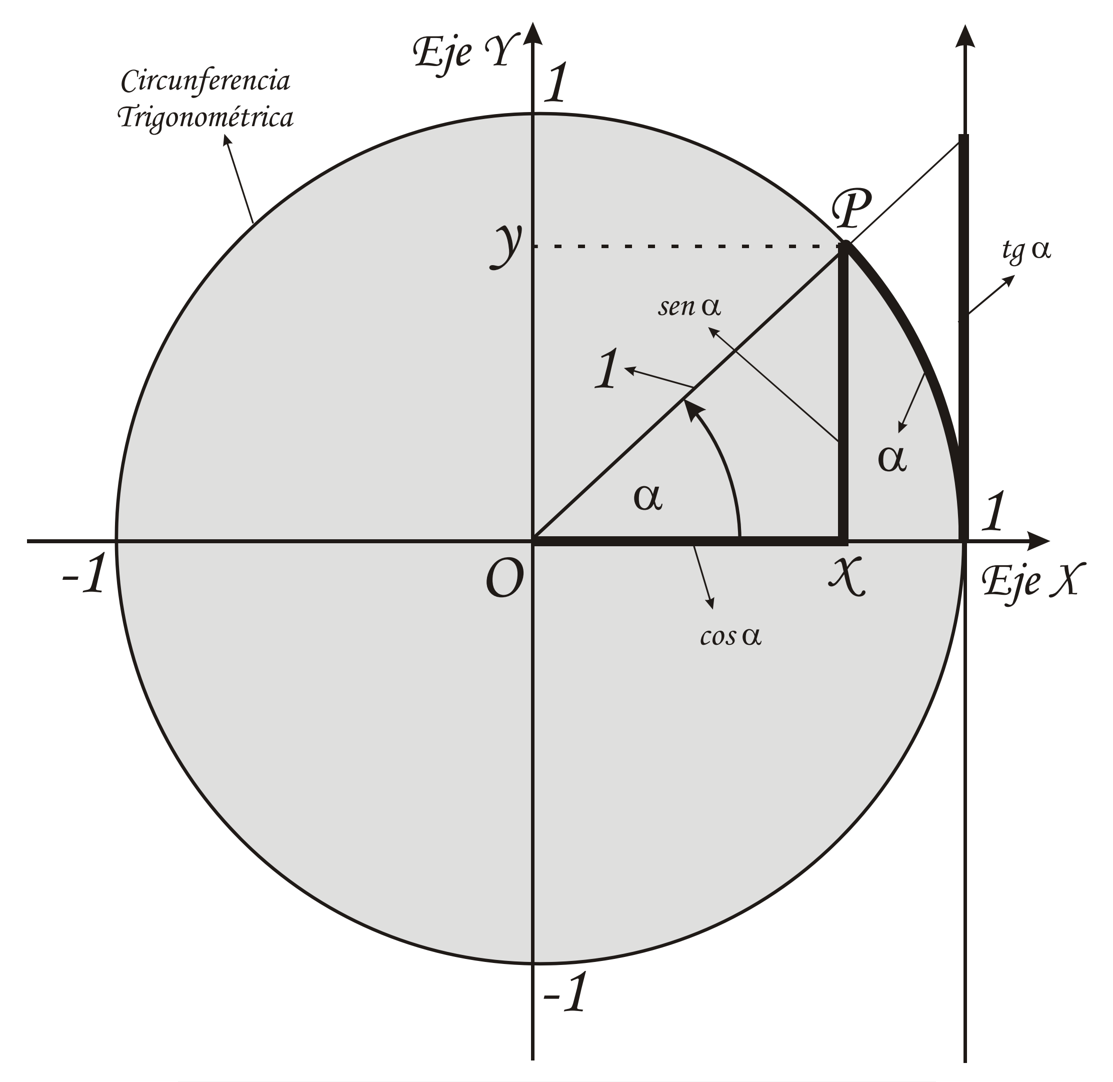
**CAPÍTULO VIII:**
**Las Constelaciones y los Signos del Zodiaco** **132**
1. Introducción
2. Las constelaciones
3. El zodiaco, sus signos y constelaciones
3.1. Los signos del zodíaco
3.2. Mitología y características de las constelaciones del zodiaco

**BIBLIOGRAFÍA** **146**

**EL AUTOR** **147**

# CAPÍTULO I

## Conceptos Básicos de la Geometría del Plano




Circunferencia trigonométrica con sus elementos característicos

## 1. Introducción

Esta primer parte puede resultar algo tediosa, no obstante es necesaria para poder encarar en forma adecuada el estudio de la esfera celeste, sus elementos, situaciones particulares y los sistemas de coordenadas asociados con ella.

Antes de enfrentar la geometría del espacio, es conveniente ver algunos conceptos y elementos de la geometría plana, como recordar que se entiende por "circunferencia", "ángulo" y algunos de los "elementos de una circunferencia".

## 2. La circunferencia

Dado que uno de los objetivos de este capítulo es conocer las características de una esfera, es lógico comenzar dando una definición de circunferencia, mencionando sus elementos básicos.

Se define entonces, a una **circunferencia** como el conjunto de puntos del plano que se hallan equidistantes de otro punto fijo. Ese punto fijo se denomina **centro de la circunferencia** ($O$) y la medida de la distancia constante se denomina **radio de la circunferencia** ($R$). Ver Fig. I-1.

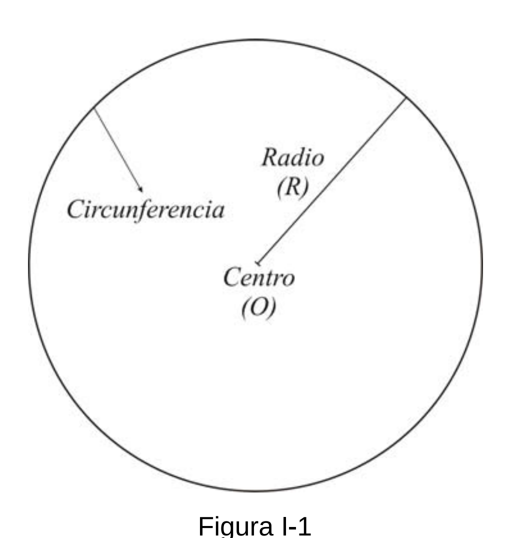



Figura I-1

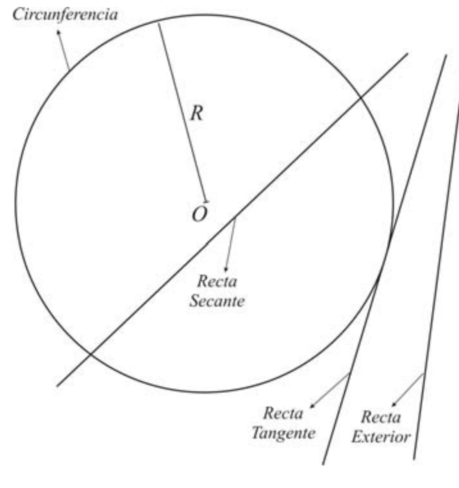



Figura I-2

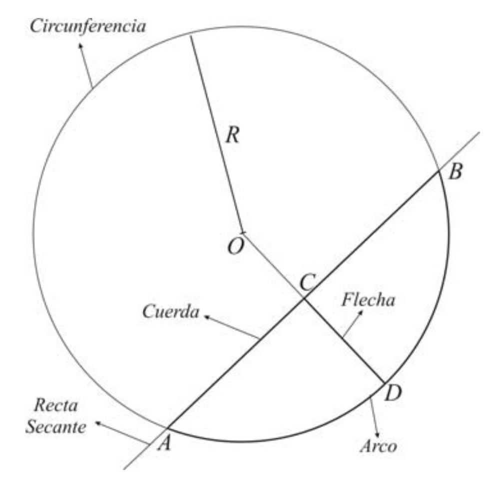



Figura I-3

Dada ahora, una circunferencia y una recta, se pueden presentar tres situaciones (ver Fig. I-2):

- La recta es **secante** a la circunferencia: Este caso sucede cuando la recta intersecta a la circunferencia en dos puntos
- La recta es **tangente** a la circunferencia: En este caso la recta intersecta a la circunferencia en un solo punto
- La recta es **exterior** a la circunferencia: En este caso no existe instersección entre ambos

En el caso de una recta secante se pueden distinguir los siguientes elementos (ver Fig. I-3):

- La circunferencia queda dividida en dos partes y cada una de ellas se denomina **arco de circunferencia**.
- El segmento que une los dos extremos del los arcos se denomina **cuerda del arco**.
- El máximo segmento perpendicular a la cuerda que se extiende desde la cuerda al arco más pequeño se conoce como **flecha del arco**.

## 3. Ángulos en el Plano

Los ángulos son elementos fundamentales para el desarrollo y la comprensión de la esfera celeste. Se parte entonces para su estudio de las siguientes definiciones y convenciones (ver Fig. I-4):

- Si se tienen dos rectas ($l_1$ y $l_2$) en el plano y ellas no son paralelas, entonces dichas rectas se intersectan en un punto ($O$). La abertura que existe entre ellas (o la abertura y un número entero de giros) se denomina **ángulo plano** y el punto $O$ se conoce como el **vértice del ángulo**.

- Una de las semirrectas que limitan al ángulo se la denomina **lado inicial**, mientras que la otra se denomina **lado terminal**. Además, es necesario establecer un sentido de giro para llegar desde el lado inicial a lado terminal para determinar cual es el sentido positivo del ángulo. Es habitual, aunque no siempre es así, adoptar como sentido positivo al sentido antihorario.

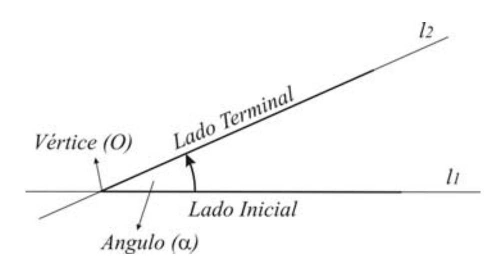



Figura I-4

La medida de un ángulo puede expresarse en diferentes unidades, entre las que se destacan:

- <u>Grados, minutos y segundos (° ' ")</u>: Se define **un grado** (°) como la medida del ángulo central subtendido por un arco igual a *1/360* de la circunferencia, **un minuto de arco** (') es *1/60* de un grado y **un segundo de arco** (") es *1/60* de un minuto.

- Radianes (*rad*): Se define **un radián** como la medida del ángulo central subtendido por un arco cuya longitud es igual a la del radio de la circunferencia.

- Horas, minutos y segundos (*h m s*): Si bien, estas son unidades de tiempo, en astronomía es conveniente utilizarlas, algunas veces, como medidas angulares. Se define, en este sentido, que **una hora** (*h*) es la medida del ángulo central subtendido por un arco igual a *1/24* de la circunferencia, **un minuto de tiempo** (*m*) es *1/60* de una hora y **un segundo de tiempo** (*s*) es *1/60* de un minuto de tiempo.

A partir de las definiciones dadas anteriormente se pueden vincular las distintas unidades angulares, resultando que:

$$360° = 2\pi\,(rad) = 24^h$$

o de otra forma:

$$1\,(rad) = \frac{180°}{\pi} \approx 57.296° = 57°17'45'' \quad \Rightarrow \quad \boxed{1\,(rad) = 206\,265''}$$

$$1° = \frac{\pi\,(rad)}{180} \approx 0.017453\,(rad)$$

$$1^h = \frac{360°}{24} \quad \Rightarrow \quad 1^h = 15° \quad \Rightarrow \quad 1^m = 15' \text{ y } 1^s = 15''$$

Es importante notar que no se deben confundir los minutos y segundos denominados “de arco” ( ’ y ” ), con los minutos y segundos “de tiempo” (*m* y *s*), ya que representan unidades diferentes.

En base a las definiciones dadas, se puede ver que, para una circunferencia de radio $R$, la longitud de un arco ($s$) que subtiende un ángulo $\alpha$ (ver Fig. I-5) viene dada por la relación:

$$\boxed{s = R\,\alpha}$$

Es de notar que, para que esta expresión sea válida, el ángulo $\alpha$ debe estar expresado en radianes, mientras que tanto $s$ como $R$ se expresan en cualquier unidad de longitud conveniente, pero debe ser la misma para ambos.

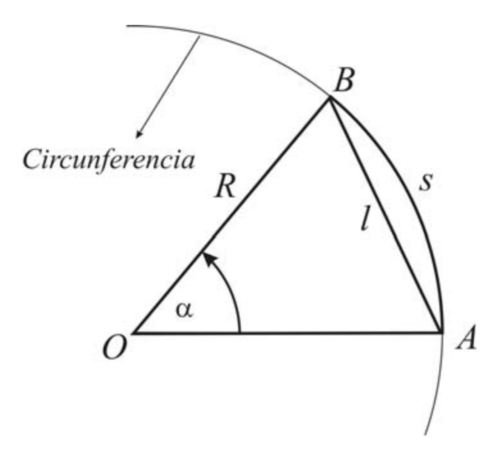



Figura I-5

En particular, si el ángulo $\alpha$ mencionado en el caso anterior es pequeño ($s << R$), se verifica que el valor del arco es cercano al valor de la cuerda, o sea que en este caso:

$$l \approx s \qquad \Rightarrow \qquad l \approx R\,\alpha$$

## 4. Sistema de Coordenadas Rectangulares en el Plano

Para determinar la posición de un punto $P$ sobre un plano, se debe tener un sistema de referencia y uno de los más comunes es el denominado **sistema de coordenadas rectangulares**. Este sistema consiste (en el plano) en un par de escalas numéricas (ejes), una horizontal y otra vertical que se intersectan en los puntos origen de cada una de ellas (ver Fig. I-6).

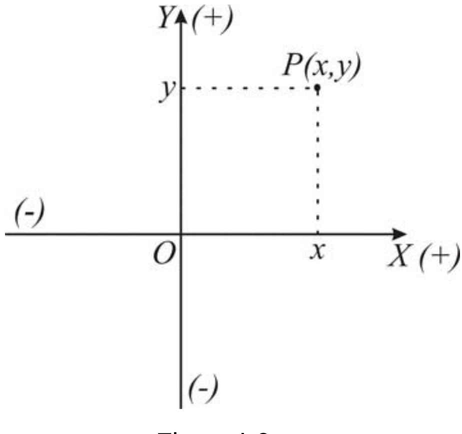



Figura I-6

La posición de $P$ queda determinada por medio de sus coordenadas, **absisa** ($x$) y **ordenada** ($y$). Se nota que se debe elegir un sentido positivo y negativo para cada coordenada. Los sentidos dados en la Fig. I-6 son los adoptados generalmente.

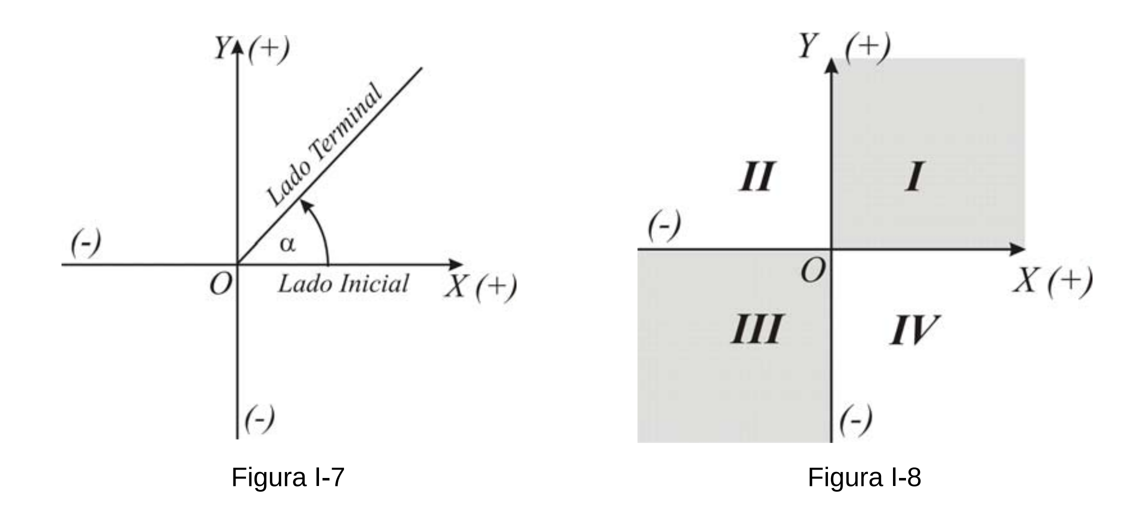



Figura I-7

Figura I-8

Se establece entonces que un ángulo se encuentra en posición normal en un sistema de coordenadas rectangulares cuando: su vértice coincide con el origen, su sentido positivo es antihorario y su lado inicial coincide con el semieje positivo de las absisas (ver Fig. I-7)

Los ejes del sistema de coordenadas dividen, de esta forma, al plano en cuatro zonas, llamadas cuadrantes (ver Fig. I-8). La identificación de cada uno de ellos se hace en base al valor que toma un ángulo en posición normal ($\alpha$) cuyo lado terminal se encuentra en el cuadrante en consideración. Entonces se denomina:

- Cuadrante I, si $0° < \alpha < 90°$
- Cuadrante II, si $90° < \alpha < 180°$
- Cuadrante III, si $180° < \alpha < 270°$
- Cuadrante IV, si $270° < \alpha < 360°$

## 5. Funciones Trigonométricas

Para la resolución de los problemas que surgen en la geometría del plano y del espacio es conveniente el uso se las **funciones trigonométricas**. Para su estudio se considera la situación dada en la Fig. I-9, o sea un ángulo ($\alpha$) en posición normal respecto a un sistema de coordenadas y un punto $P$ de coordenadas $x$, $y$ localizado en el lado terminal del ángulo a una distancia $r$ del vértice. De esta forma se definen las siguientes funciones trigonométricas:

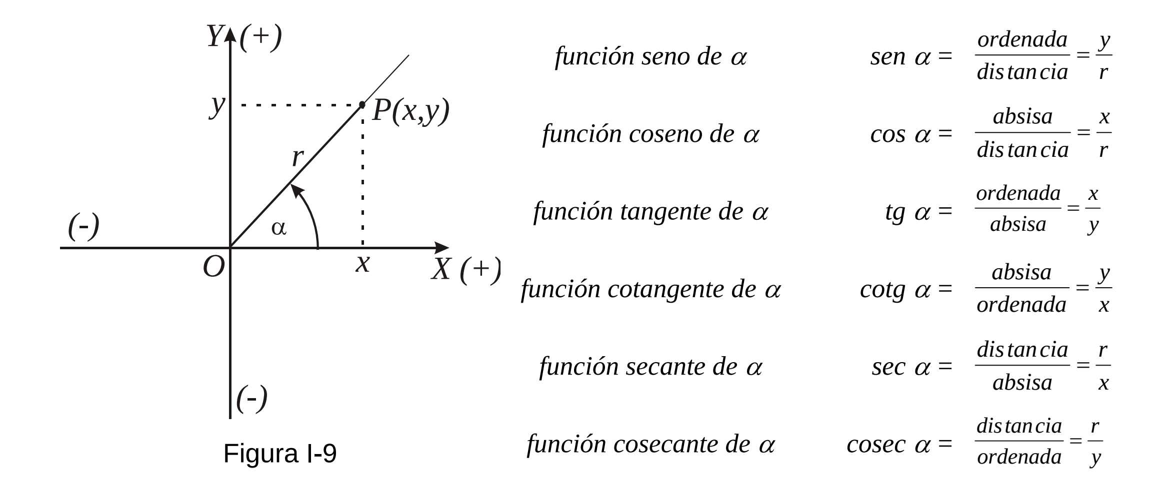


Figura I-9

Es de notar que dado que la distancia $r$ es siembre positiva, los signos que adoptan las funciones trigonométricas dependerán de los signos de las coordenadas $x$ e $y$. De esta forma se resultan los signos expresados en la Fig. I-10.

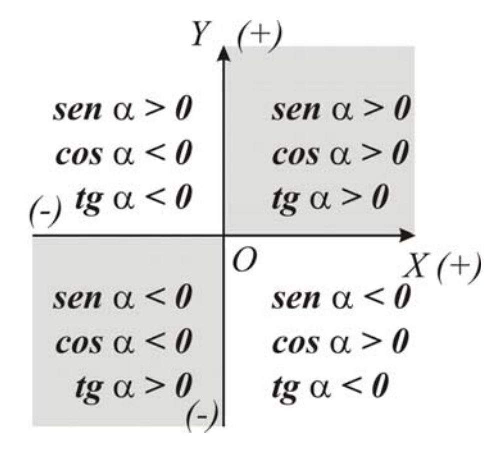


Figura I-10

Una representación de las funciones definidas se puede hacer a partir de la denominada **circunferencia trigonométrica**. Esta es una circunferencia centrada en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares que posee radio unidad ($R = 1$). En la Fig. I-11 se la representa, junto con un ángulo genérico $\alpha$ y se identifican en el gráfico los distintos elementos que representan a las diferentes funciones trigonométricas.

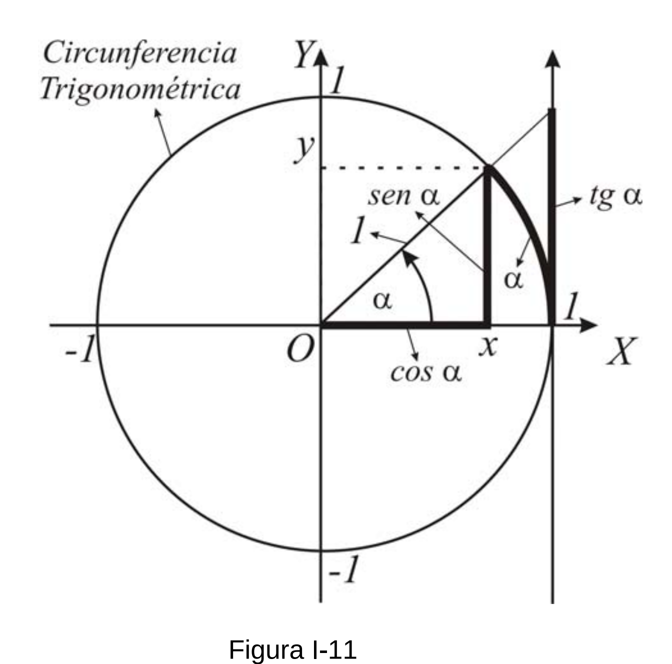



Figura I-11

En la Fig. I-11 se aprecia el hecho de que si se trabaja con ángulos pequeños se verifica que:

$$sen\ \alpha \approx \alpha \quad \text{y} \quad tg\ \alpha \approx \alpha$$

donde $\alpha$ debe estar expresado en radianes.

## 6. Triángulos Planos

Se denominan **triángulos planos** a la zona del plano delimitada por tres rectas ($l_1$, $l_2$ y $l_3$) que no son paralelas y que no se intersectan en un mismo punto (ver Fig. I-12, nótese la forma en que se han identificado los lados y los respectivos ángulos opuestos). Uno de los problemas clásicos es determinar alguno de sus elementos, conocidos los valores de los otros. Este problema posee solución en alguno de los siguientes casos:

- Dados un lado y dos ángulos
- Dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos
- Dados dos lados y el ángulo comprendido entre ellos
- Dados los tres lados

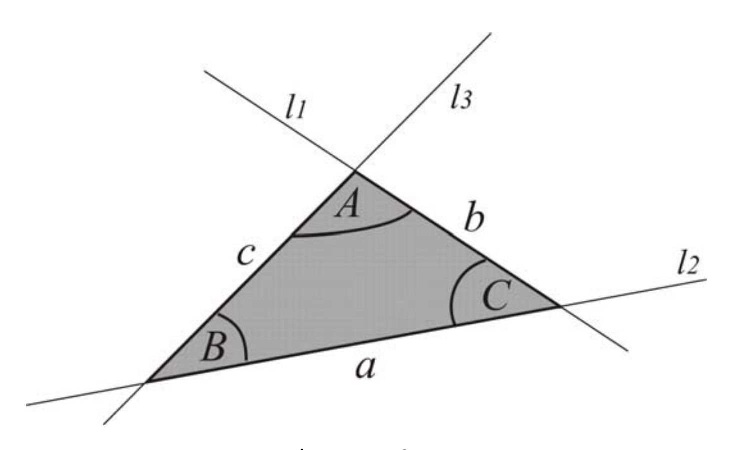


Figura I-12

Las fórmulas que permiten resolver estos problemas son las siguientes:

- Regla de los ángulos para triángulos planos: En todo triángulo plano, *“la suma de los valores de los ángulos internos es igual a 180°”*, o sea:

$$A + B + C = 180°$$

- <u>Teorema del seno para triángulos planos</u>: En todo triángulo plano, *"los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos"*, o sea:

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C}$$

- <u>Teorema del coseno para triángulos planos:</u> En todo triángulo plano, *"el cuadrado de un lado cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido"*, o sea:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos A \quad ; \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2\, a\, c \cos B \quad ; \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2\, a\, b \cos C$$

- <u>Teorema de Pitágoras:</u> Este es el caso particular del teorema del coseno aplicado a un triángulo con un ángulo recto (**triángulo rectángulo**), por ejemplo en el vértice *C* como lo indica la Fig. I-13. De esta forma $\cos C = 0$ y resulta que:

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$$

O sea que: *"el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos"*.

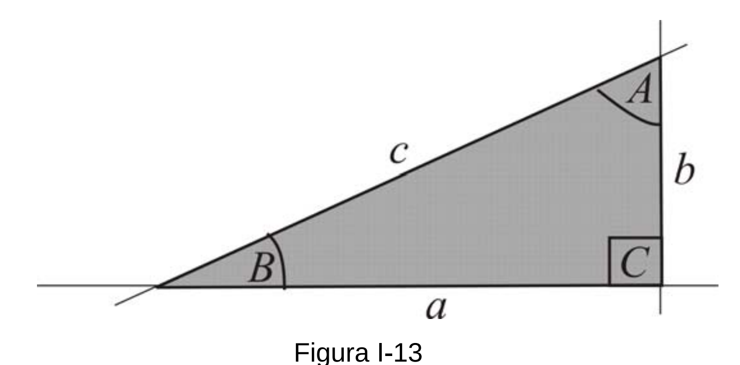
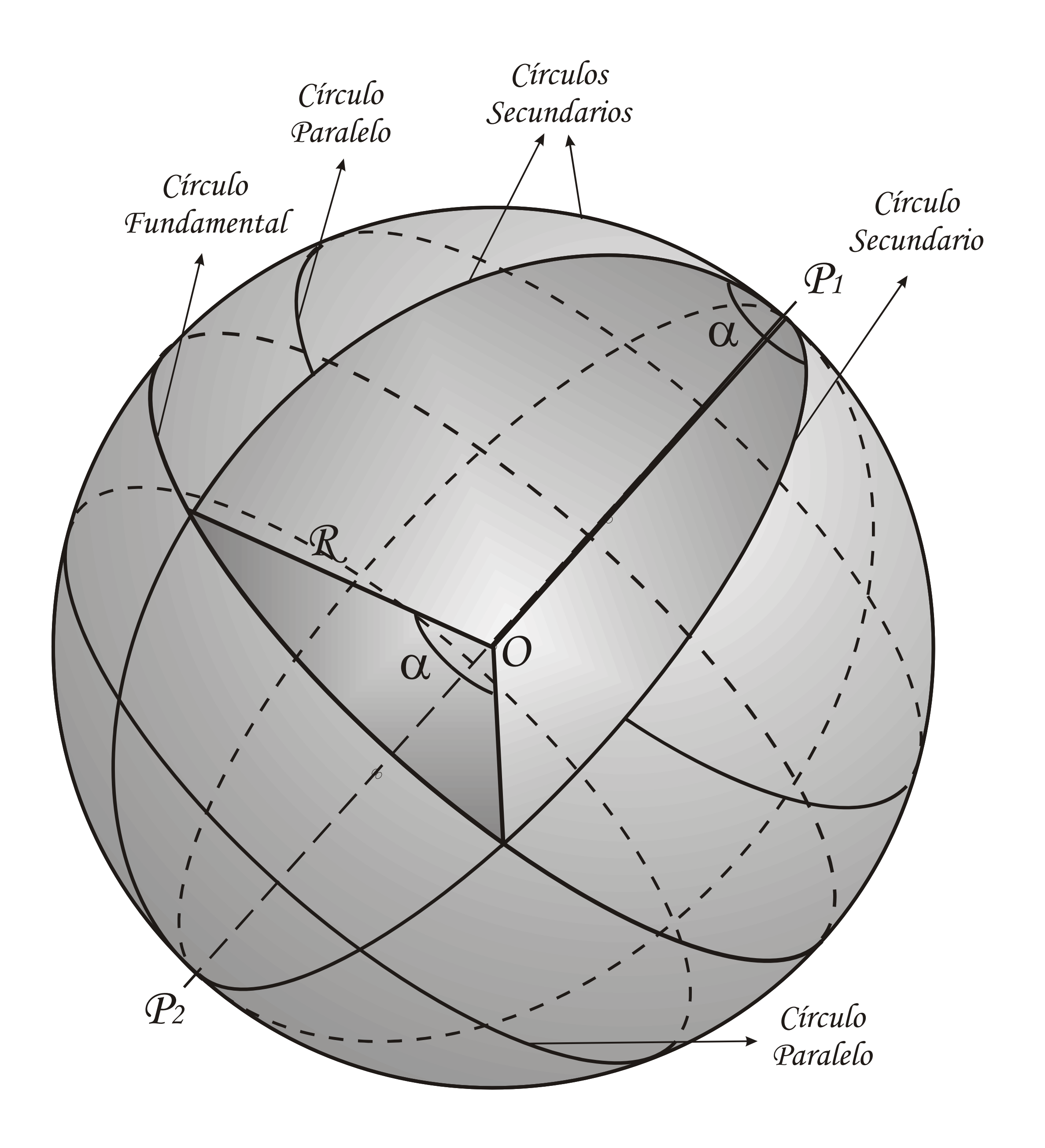



Figura I-13

# CAPÍTULO II

## Conceptos Básicos de la Geometría del Espacio




La esfera y sus elementos característicos

## 1. Introducción

En este capítulo se extienden al espacio los conceptos dados en el capítulo anterior para la geometría en el plano. En particular, se brindan los conceptos relacionados con la geometría de la esfera, del cono y de los elementos asociados con ellos.

## 2. Rectas, planos y ángulos en el espacio

Así como en una superficie plana, la curva más simple es una recta, en el espacio la superficie más simple es un plano. Respecto a una superficie de este tipo se puede decir entonces que:

- Si se tienen dos rectas en el espacio ($l_1$ y $l_2$) y ellas se intersectan en un punto ($O$), entonces existe un único plano ($P$) que las contiene (ver Fig. II-1).

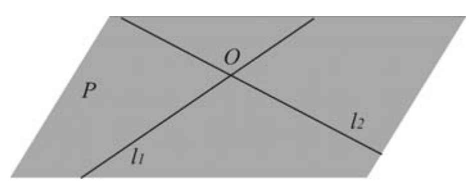



Figura II-1

- Una recta ($l_3$) es perpendicular al plano $P$, si dicha recta es perpendicular tanto a la recta $l_1$ como a la recta $l_2$ mencionadas anteriormente (ver Fig. II-2).

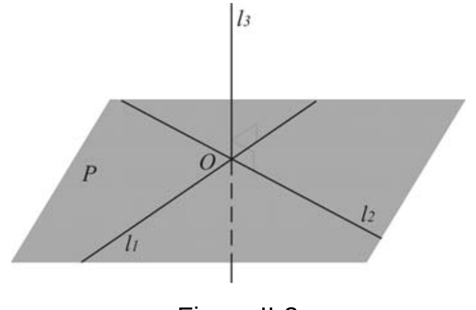



Figura II-2

- Dos planos ($P_1$ y $P_2$), no paralelos, se intersectan en una recta que se denomina **arista** ($r_3$) y ellos determinan cuatro zonas del espacio llamadas **ángulos diedros**.

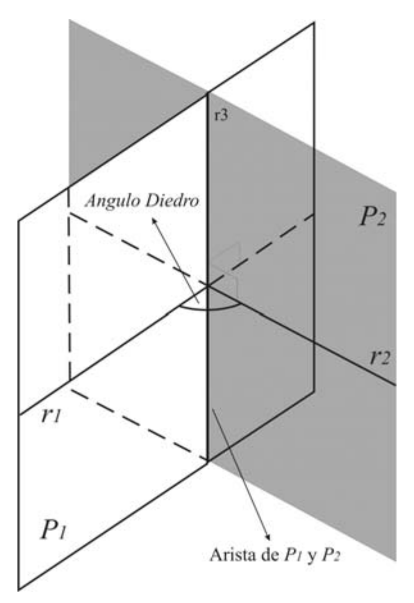



Figura II-3

- Si luego se trazan dos rectas ($r_1$ y $r_2$), una de ellas contenida en el plano $P_1$ y la otra en el plano $P_2$, de manera que ambas sean perpendiculares a la recta $r_3$ y se corten en un mismo punto $O$, entonces *el valor del ángulo diedro respectivo viene dado por el valor del ángulo plano* formado entre $r_1$ y $r_2$ (ver Fig. II-3).

## 3. La Esfera

### 3.1. Definición y Elementos de una Esfera

La superficie del espacio que más será utilizada a lo largo del texto será la esfera, por lo que es necesario conocer en detalle su definición, sus propiedades y todos sus elementos.

Se define entonces, a **una esfera** como el conjunto de puntos del espacio equidistantes de otro punto fijo. Este punto fijo es el **centro de la esfera** ($O$) y la medida de la distancia constante se denomina **radio de la esfera** ($R$).

La intersección de un plano ($P$) con una esfera es una circunferencia que se denomina:

- **Circunferencia máxima** (o **círculo máximo**), si el centro de la esfera ($O$) está contenido en el plano (ver Fig. II-4).

- **Circunferencia menor** (o **círculo menor**), si el centro de la esfera ($O$) no se halla contenido en el plano (ver Fig. II-5).

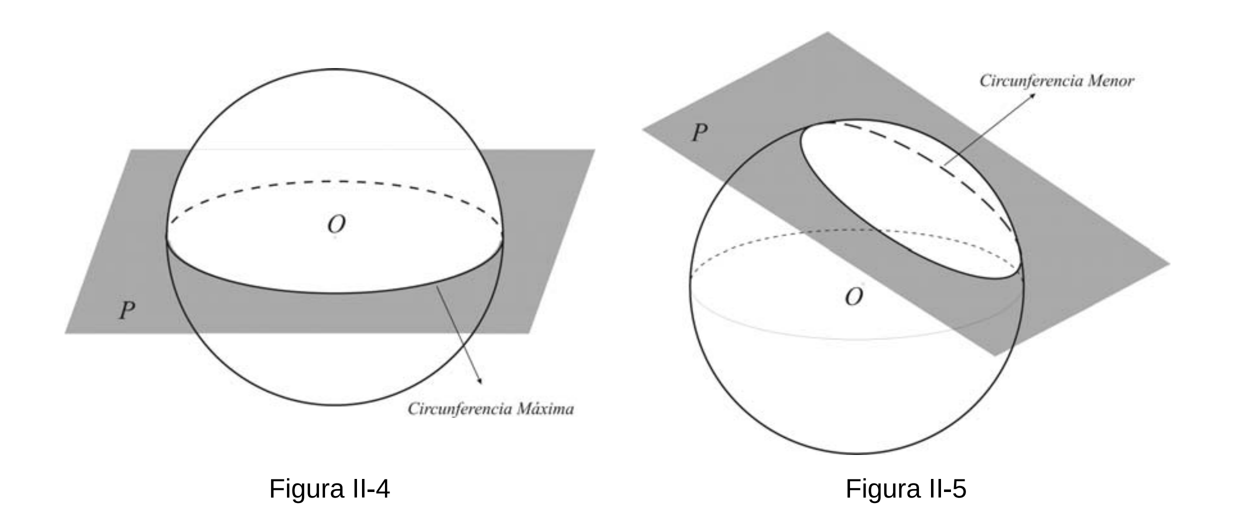



Figura II-4 Figura II-5

Dado un círculo máximo (ver Fig. II-6), si se traza una recta que pase por el centro (*O*) de la esfera y que sea perpendicular al plano *P* que contiene a dicho círculo, esa recta intersecta a la esfera en dos puntos ($P_1$ y $P_2$). Se denominan entonces:

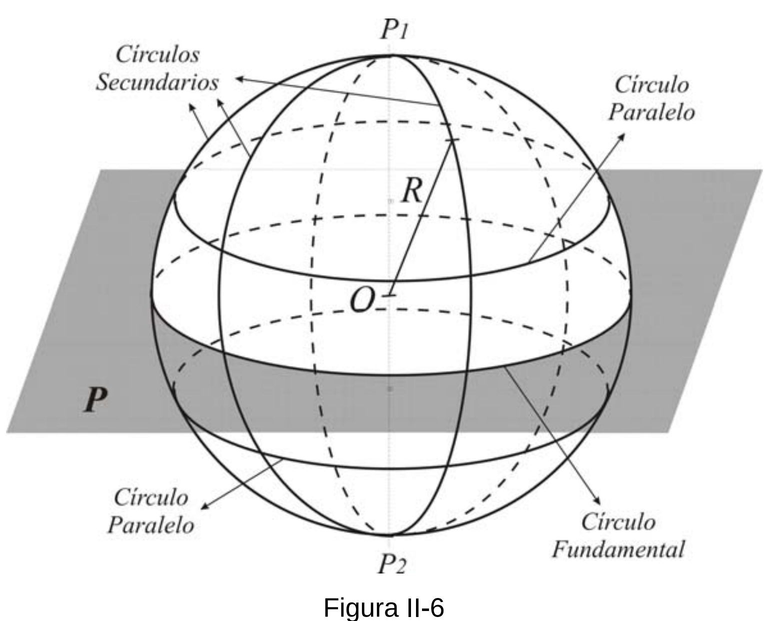



Figura II-6

- **Círculo fundamental**, al círculo máximo mencionado
- **Plano fundamental**, al plano *P*
- **Polos** (asociados al círculo fundamental), a los puntos $P_1$ y $P_2$.
- **Círculos secundarios**, al conjunto de círculos máximos que pasan por los polos $P_1$ y $P_2$.
- **Círculos paralelos**, a los círculos menores paralelos al plano fundamental.

### 3.2. Arcos, Ángulos y Triángulos sobre una Esfera

En esta sección se tratan las definiciones vinculadas con algunas curvas y áreas localizadas sobre una superficie esférica. Se comienza entonces, planteando las situaciones dadas en las Figs. II-7 y II-8, donde se verifica que:

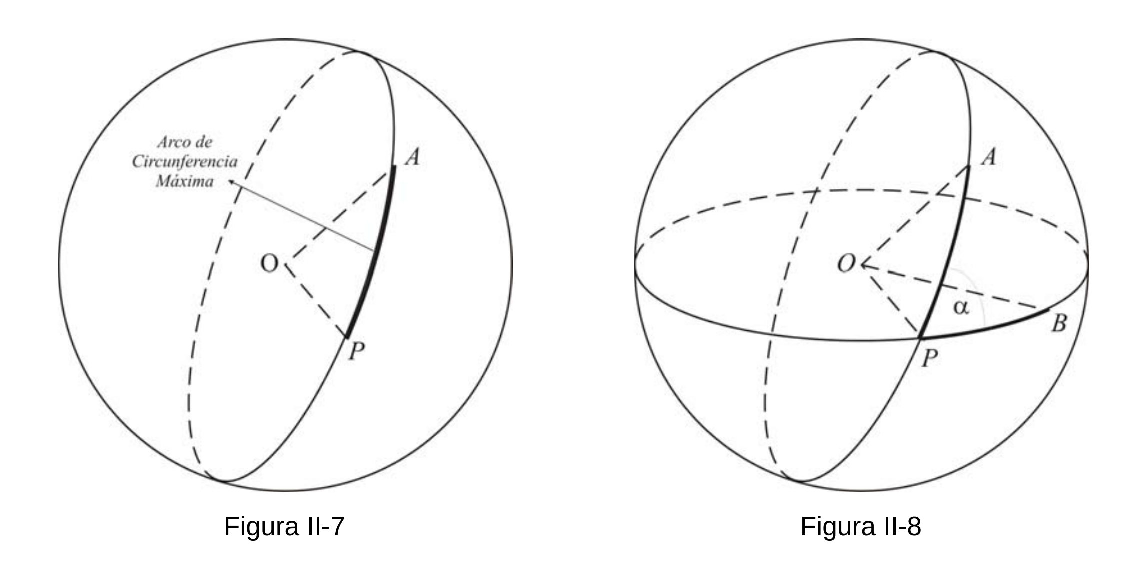



Figura II-7　　　　Figura II-8

- Dos puntos distintos ($P$ y $A$) ubicados en la superficie de una esfera, que no sean extremos de un diámetro, pertenecen a una “única” circunferencia máxima.

- La distancia más corta entre los puntos $P$ y $A$ mencionados anteriormente, recorriendo la superficie de la esfera, viene dada por la longitud del menor arco $PA$ de la circunferencia máxima que los contiene.

- El ángulo formado en una esfera en la intersección de dos arcos de circunferencias máximas (arco $PA$ y arco $PB$) se conoce como **ángulo esférico** ($\alpha$) y el punto de intersección de los arcos se denomina **vértice del ángulo esférico** ($P$).

- El valor del ángulo esférico viene dado por el valor del ángulo diedro correspondiente al formado por los planos que contienen a las respectivas circunferencias máximas.

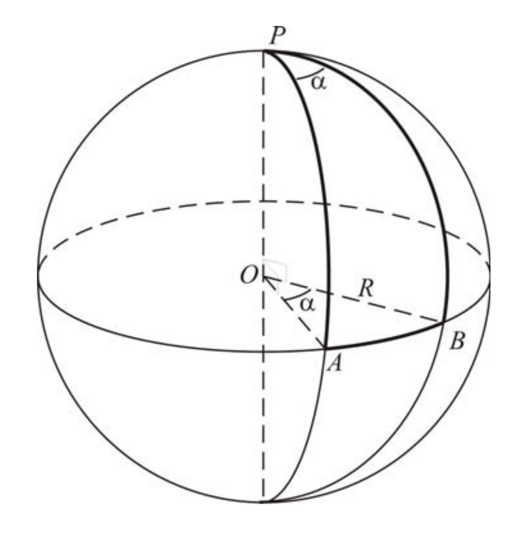



Figura II-9

Si ahora se tienen nuevamente dos arcos *PA* y *PB*, y cada uno corresponde a un cuarto de circunferencia, entonces se tiene la situación graficada en la Fig. II-9 y el valor del ángulo esférico ($\alpha$) será el valor del ángulo plano formado entre las rectas *OA* y *OB* (recordar Fig. II-3).

Además, como la longitud del arco *AB* (ver sec. 3 del capítulo I) viene dada por:

$$longitud\ de\ AB = R\ \alpha$$

donde *R* es el radio de la esfera. Resulta entonces que, para una esfera dada (un *R* dado), la *longitud del arco AB* es proporcional al valor del ángulo $\alpha$, por lo que la medida de este último es una medida de dicho arco. De esta manera, *es válido expresar la longitud de los arcos de una circunferencia máxima de una esfera en unidades angulares*, esto es: radianes; grados, minutos y segundos (de arco) u horas, minutos y segundos (de tiempo). Aunque, en realidad, lo que se está diciendo es el valor del ángulo que dichos arcos subtienden en el centro de la esfera y no la longitud de los arcos en sí. Desde otro punto de vista, se puede considerar que la esfera posee un radio unidad ($R = 1$).

Se denomina **triángulo esférico** a la región de la superficie de una esfera limitada por los arcos de tres circunferencias máximas (ver Fig. II-10). Los elementos de este triángulo son los lados (arcos) $a$, $b$ y $c$; y los ángulos esféricos $A$, $B$ y $C$. Se nota que, por convención el lado $a$ es el lado opuesto al ángulo $A$ y de la misma manera sucede con los demás.

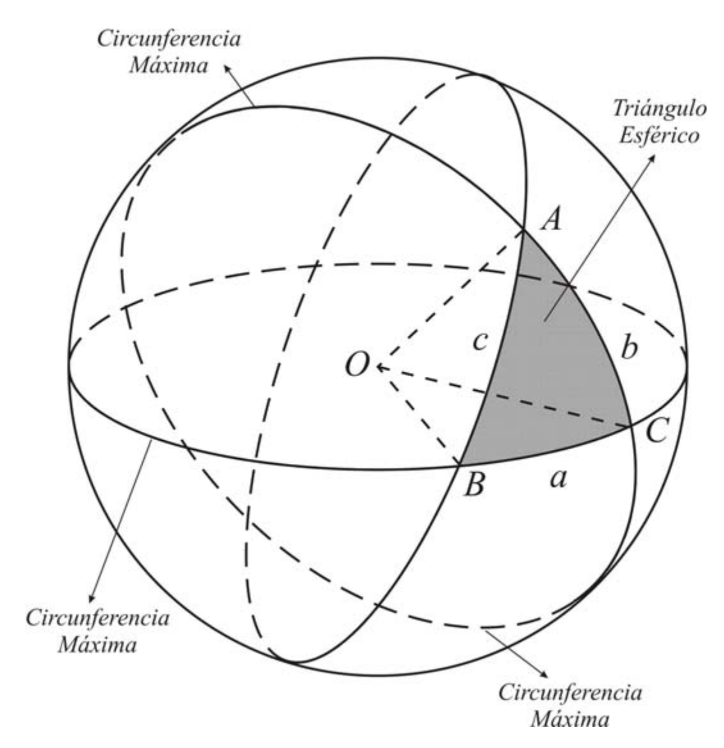



Figura II-10

### 3.3. Fórmulas Básicas de la Trigonometría Esférica

En esta sección se deducen las fórmulas básicas de la trigonometría esférica a partir de las fórmulas ya conocidas para la trigonometría plana. Estas fórmulas son las que se conocen con los nombres de: “Teorema del coseno”, “Teorema del seno” y “Fórmula de los cinco elementos”.

Para ello, se considera nuevamente la esfera de la Fig. II-10, se extrae de ella el triángulo esférico en forma aislada y se realiza sobre él, la construcción geométrica indicada en la Fig. II-11. O sea, se trazan dos líneas rectas por el punto $A$ de forma que cada una de ellas sea tangente a los arcos $b$ y $c$ del triángulo esférico. Estas dos tangentes intersectan las prolongaciones de los radios $OB$ y $OC$ en los puntos $D$ y $E$ respectivamente.

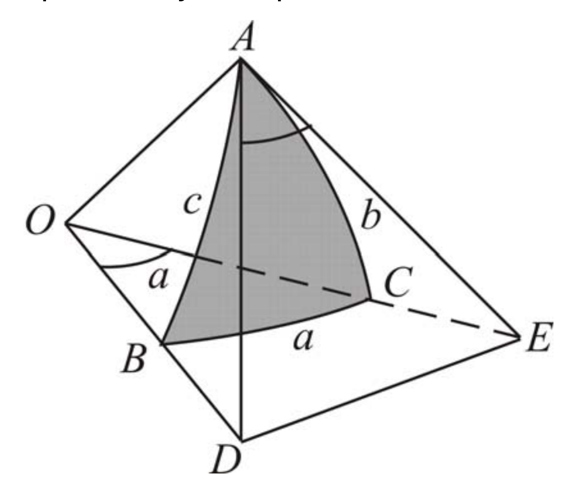



Figura II-11

Se tiene entonces, una figura geométrica formada por cuatro triángulos planos que son:

- triángulo $DOE$
- triángulo $DAE$
- triángulo $DOA$ (rectángulo en $A$)
- triángulo $EOA$ (rectángulo en $A$)

Se nota además que el ángulo $DOE$ es el ángulo subtendido por el arco $BC$ ($a$), y por definición el ángulo $DAE$ es el ángulo esférico $A$.

### 3.3.1. Teorema del Coseno

Se plantea ahora el "Teorema del Coseno para Triángulos Planos" (ver sec. 6 del capítulo I) al triángulo $DOE$ y al triángulo $DAE$, entonces resulta:

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2 \cdot AD \cdot AE \cdot \cos A$$
$$DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2 \cdot OD \cdot OE \cdot \cos a$$

igualando ambas expresiones queda que:

$$OD^2 + OE^2 - 2 \cdot OD \cdot OE \cdot \cos a = AD^2 + AE^2 - 2 \cdot AD \cdot AE \cdot \cos A$$
$$(OD^2 - AD^2) + (OE^2 - AE^2) = 2 \cdot (OD \cdot OE \cdot \cos a - AD \cdot AE \cdot \cos A)$$

y dado que los triángulos $DOA$ y $EOA$ son rectángulos en el vértice $A$, aplicando el "Teorema de Pitágoras" (ver sec. 6 del capítulo I), resulta ser que:

$$OD^2 - AD^2 = OA^2 \qquad \text{y} \qquad OE^2 - AE^2 = OA^2$$

entonces la expresión anterior se reduce a:

$$2 \cdot OA^2 = 2 \cdot (OD \cdot OE \cdot \cos a - AD \cdot AE \cdot \cos A)$$
$$OA^2 = OD \cdot OE \cdot \cos a - AD \cdot AE \cdot \cos A$$

despejando ahora cos a se obtiene que:

$$\cos a = \frac{OA^2}{OE \cdot OD} + \frac{AE \cdot AD}{OE \cdot OD} \cdot \cos A \qquad \text{o} \qquad \cos a = \frac{OA}{OE} \cdot \frac{OA}{OD} + \frac{AE}{OE} \cdot \frac{AD}{OD} \cdot \cos A$$

pero como los triángulos $DOA$ y $EOA$ son rectángulos en el vértice $A$, y dado que los respectivos ángulos en el vértice $O$ son iguales a los arcos $c$ y $b$ (ver Fig. II-11), se deduce que:

$$cos\, b = \frac{OA}{OE} \qquad sen\, b = \frac{AE}{OE} \qquad\qquad cos\, c = \frac{OA}{OD} \qquad sen\, c = \frac{AD}{OD}$$

por lo que la última expresión toma la siguiente forma:

$$cos\,a = cos\,b \cdot cos\,c + sen\,b \cdot sen\,c \cdot cos\,A$$

y si se plantean las mismas ecuaciones para el vértice $B$ o el $C$ del triángulo esférico se obtienen expresiones similares, resultando:

$$cos\,a = cos\,b \cdot cos\,c + sen\,b \cdot sen\,c \cdot cos\,A$$
$$cos\,b = cos\,c \cdot cos\,a + sen\,c \cdot sen\,a \cdot cos\,B$$
$$cos\,c = cos\,a \cdot cos\,b + sen\,a \cdot sen\,b \cdot cos\,C$$

que es la expresión del **Teorema del coseno para triángulos esféricos**

### 3.3.2. Teorema del Seno

Se parte ahora de una de las expresiones del Teorema del coseno, o sea:

$$cos\,a = cos\,b \cdot cos\,c + sen\,b \cdot sen\,c \cdot cos\,A \quad \Rightarrow \quad sen\,b \cdot sen\,c \cdot cos\,A = cos\,a - cos\,b \cdot cos\,c$$

y elevando al cuadrado a ambos lados del signo igual queda que:

$$sen^2 b \cdot sen^2 c \cdot cos^2 A = cos^2 a - 2 \cdot cos\,a \cdot cos\,b \cdot cos\,c + cos^2 b \cdot cos^2 c$$
$$sen^2 b \cdot sen^2 c \cdot (1 - sen^2 A) = cos^2 a - 2 \cdot cos\,a \cdot cos\,b \cdot cos\,c + cos^2 b \cdot cos^2 c$$
$$sen^2 b \cdot sen^2 c - sen^2 b \cdot sen^2 c \cdot sen^2 A = cos^2 a - 2 \cdot cos\,a \cdot cos\,b \cdot cos\,c + cos^2 b \cdot cos^2 c$$
$$(1 - cos^2 b) \cdot (1 - cos^2 c) - sen^2 b \cdot sen^2 c \cdot sen^2 A = cos^2 a - 2 \cdot cos\,a \cdot cos\,b \cdot cos\,c + cos^2 b \cdot cos^2 c$$
$$1 - cos^2 b - cos^2 c + cos^2 b\, cos^2 c - sen^2 b \cdot sen^2 c \cdot sen^2 A = cos^2 a - 2 \cdot cos\,a \cdot cos\,b \cdot cos\,c + cos^2 b \cdot cos^2 c$$

que simplificando y agrupando queda:

$$sen^2 b \cdot sen^2 c \cdot sen^2 A = 1 - cos^2 a - cos^2 b - cos^2 c + 2 \cdot cos\,a \cdot cos\,b \cdot cos\,c$$

pero se observa que el segundo miembro de esta expresión es una función simétrica de $a$, $b$ y $c$, lo que significa que si se hubiese partido de alguna otra de las expresiones del Teorema del Coseno y se hubiesen seguido pasos similares el segundo término no se vería alterado, o sea que:

$$sen^2 c \cdot sen^2 a \cdot sen^2 B = 1 - cos^2 a - cos^2 b - cos^2 c + 2 \cdot cos\,a \cdot cos\,b \cdot cos\,c$$
$$sen^2 a \cdot sen^2 b \cdot sen^2 C = 1 - cos^2 a - cos^2 b - cos^2 c + 2 \cdot cos\,a \cdot cos\,b \cdot cos\,c$$

e igualando entre sí los primeros términos de las tres expresiones queda:

$$sen^2 b \cdot sen^2 c \cdot sen^2 A = sen^2 c \cdot sen^2 a \cdot sen^2 B = sen^2 a \cdot sen^2 b \cdot sen^2 C$$

dividiendo ahora cada término por $sen^2 a \cdot sen^2 b \cdot sen^2 c$ se obtiene que:

$$\frac{sen^2 A}{sen^2 a} = \frac{sen^2 B}{sen^2 b} = \frac{sen^2 C}{sen^2 c}$$

dado que en un triángulo esférico todos los ángulos son menores a $180°$ (en valor absoluto), se puede tomar la raíz cuadrada de cada uno de los miembros de la ecuación anterior sin que aparezcan problemas de signos, entonces finalmente queda que:

$$\boxed{\frac{senA}{sena} = \frac{senB}{senb} = \frac{senC}{senc}}$$

que es la expresión **del Teorema del seno para triángulos esféricos**.

### 3.3.3. Fórmula de los Cinco Elementos

Se parte nuevamente de la expresión del Teorema del Coseno para el $cos\ a$, o sea

$$cos\,a = cos\,b \cdot cos\,c + sen\,b \cdot sen\,c \cdot cos\,A$$
$$sen\,b \cdot sen\,c \cdot cos\,A = cos\,a - cos\,b \cdot cos\,c$$

y reemplazando ahora $cos\ c$ por su expresión dada también por el Teorema del Coseno, queda:

$$sen\,b \cdot sen\,c \cdot cos\,A = cos\,a - cos\,b \cdot (cos\,a \cdot cos\,b + sen\,a \cdot sen\,b \cdot cos\,C)$$
$$sen\,b \cdot sen\,c \cdot cos\,A = cos\,a - cos^2 b \cdot cos\,a - sen\,a \cdot sen\,b \cdot cos\,b \cdot cos\,C$$
$$sen\,b \cdot sen\,c \cdot cos\,A = cos\,a \cdot (1 - cos^2 b) - sen\,a \cdot sen\,b \cdot cos\,b \cdot cos\,C$$
$$sen\,b \cdot sen\,c \cdot cos\,A = cos\,a \cdot sen^2 b - sen\,a \cdot sen\,b \cdot cos\,b \cdot cos\,C$$

y dividiendo ambos términos por $sen\ b$ se obtiene que:

$$sen\,c \cdot cos\,A = cos\,a \cdot sen\,b - sen\,a \cdot cos\,b \cdot cos\,C$$

que es la expresión de la **Fórmula de los cinco elementos para triángulos esféricos**, pudiéndose obtener expresiones similares, eligiendo otro arco, otro ángulo o una combinación de ambos, resultando así:

$$sen\,c \cdot cos\,A = cos\,a \cdot sen\,b - sen\,a \cdot cos\,b \cdot cos\,C$$
$$sen\,c \cdot cos\,B = cos\,b \cdot sen\,a - sen\,b \cdot cos\,a \cdot cos\,C$$

$$sen\,b \cdot cos\,A = cos\,a \cdot sen\,c - sen\,a \cdot cos\,c \cdot cos\,B$$
$$sen\,b \cdot cos\,C = cos\,c \cdot sen\,a - sen\,c \cdot cos\,a \cdot cos\,B$$

$$sen\,a \cdot cos\,B = cos\,b \cdot sen\,c - sen\,b \cdot cos\,c \cdot cos\,A$$
$$sen\,a \cdot cos\,C = cos\,c \cdot sen\,b - sen\,c \cdot cos\,b \cdot cos\,A$$

### 3.4. Relación entre Círculos Máximos y Círculos Paralelos

En esta sección se va a determinar que relación existe entre distintos elementos (ángulos, radios y arcos) de un círculo máximo, tomado como círculo fundamental, y un círculo menor paralelo a él (recordar la sec. 3.1 y la Fig. II-6).

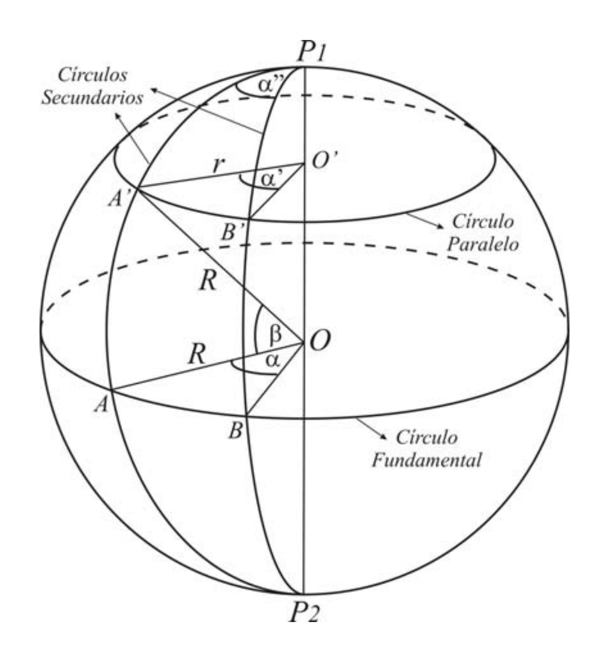



Figura II-12

Para hallar las relaciones buscadas se utiliza la Fig. II-12. En ella se ha graficado una esfera de radio $R$ y se han indicado:

- un círculo fundamental,
- un círculo paralelo (de radio $r$)
- dos semicírculos secundarios

Se observa entonces que, los círculos fundamentales forman un ángulo esférico $\alpha''$ en los polos y, delimitan sobre los otros círculos los arcos $AB$ y $A'B'$ respectivamente. Estos arcos subtienden a su vez los ángulos planos $\alpha$ y $\alpha'$ .

Ahora se puede plantear que, dado que los segmentos $AO$ y $A'O'$ se encuentran en un mismo plano (aquel que contiene a uno de los semicírculos secundarios) y que cada una de ellos están contenidos también en dos planos paralelos (aquel que contiene al círculo fundamental y aquel que contiene al círculo paralelo), entonces dichos segmentos son paralelos entre sí. Razonando en forma análoga los segmentos $BO$ y $B'O'$ también son paralelos entre sí. Entonces resulta ser los ángulos planos $\alpha$ y $\alpha'$ son iguales, o sea:

$$\alpha' = \alpha$$

Como el eje $P_1$-$P_2$ es por definición perpendicular al plano del círculo fundamental y al del círculo paralelo, entonces el triángulo plano de vértices $OA'O'$ es rectángulo en $O'$ y su ángulo en $O$ mide $90°$ - $\beta$. De esta forma se puede escribir que:

$$r = \overline{A}\overline{O}\ sen\,(90° - \beta) \quad \text{pero como} \quad \overline{A}\overline{O} = R \quad \text{, entonces} \quad r = R \cos \beta$$

Las longitudes de los arcos $AB$ y $A'B'$ (ver sec. 3 del Capítulo I) vienen dadas por:

$$longitud\ de\ AB = R\ \alpha \quad \text{y} \quad longitud\ de\ A'B' = r\ \alpha'$$

utilizando luego las relaciones deducidas en los puntos anteriores resulta que:

$$longitud\ de\ A'B' = (longitud\ de\ AB) \cos \beta$$

### 3.5. Coordenadas Esféricas

Para fijar la posición de un punto sobre una superficie esférica, se lo debe hacer en relación a un conjunto de círculos de referencia, o sea se debe elegir un círculo fundamental, junto con sus correspondientes elementos asociados (ver sec. 3.1). La posición de un punto cualquiera $A$ de la esfera queda determinada entonces por el siguiente par de **coordenadas esféricas** (ver Fig. II-13):

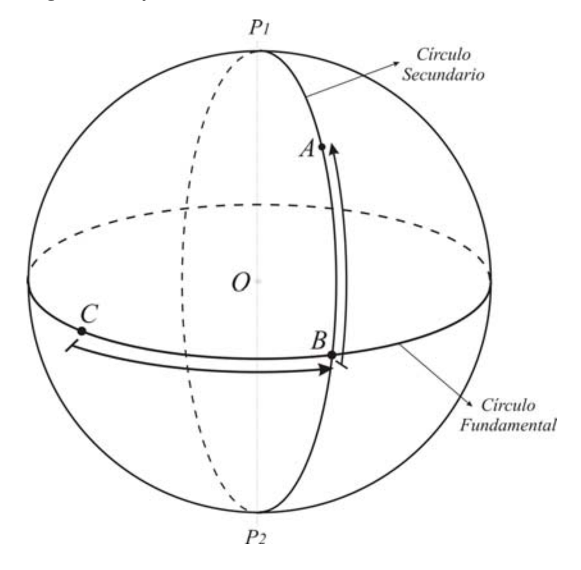



Figura II-13

La distancia angular $BA$ del punto $A$ al círculo fundamental, medida a lo largo del círculo secundario que pasa por $A$.

La distancia angular $CB$ del punto de intersección $B$ del círculo secundario y el círculo fundamental y un punto arbitrario $C$ del círculo fundamental que se toma como origen.

Es necesario, además, adoptar un sentido positivo para ambas coordenadas esféricas.

## 4. El Cono y las Secciones Cónicas

### 4.1. Definición y Elementos de un Cono

Dado que las trayectorias que recorren los objetos bajo la acción de un campo gravitatorio producido por una masa puntual son secciones de un cono (ver sec. 2.2 del capítulo IV más adelante), es conveniente mencionar cómo se puede definir un cono y cuáles son sus elementos (ver Fig. II-14).

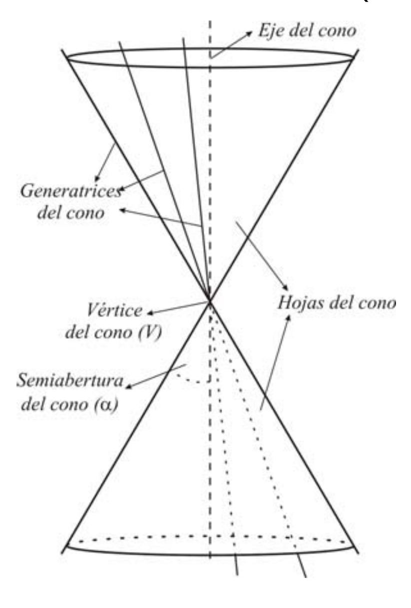



Figura II-14

- Dado un par de rectas en el espacio que se intersectan en un punto $V$ y forman entre ellas un ángulo $\alpha < 90°$, se denomina a una de ellas **eje** a la otra **generatriz**. Se define entonces, a un **cono recto de sección circular** a aquella superficie del espacio originada por la generatriz al girar alrededor del eje.

- La recta mencionada antes como eje es el **eje del cono**, cualquiera de las rectas contenidas en la superficie del cono se considera que es una generatriz, el punto $V$ es el **vértice del cono**, y el ángulo $\alpha$ es la **semiabertura del cono**. Se nota además, que el cono se halla compuesto por dos hojas que se extienden indefinidamente hacia ambos lados del vértice.

### 4.2. Las Secciones Cónicas

Se denominan **secciones cónicas** a aquellas curvas que se obtienen de la intersección de un plano con un cono recto de sección circular (como el definido anteriormente).

Según sea entonces la inclinación ($\phi$) del plano respecto al eje del cono se tendrán los siguientes casos (ver Fig. II-15):

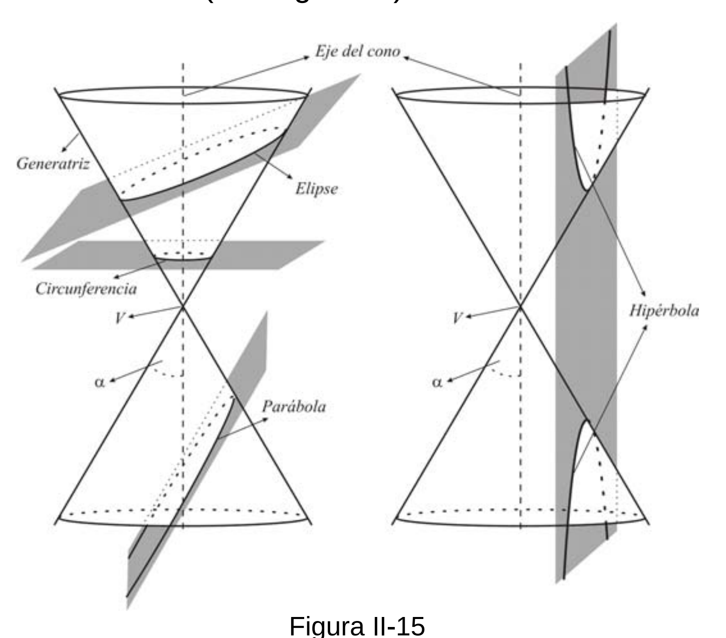



Figura II-15

- **una circunferencia**, si el plano es perpendicular al eje del cono, $\phi = 90°$.
- **una elipse**, si el plano se halla inclinado respecto al eje del cono, $\alpha < \phi < 90°$.
- **una parábola**, si el plano es paralelo a una generatriz del cono, $\phi = \alpha$.
- **una hipérbola**, si el plano se halla más inclinado que una generatriz, $0° < \phi < \alpha$, ó si es paralelo al eje del cono.

Se pueden nombrar también casos degenerados de las secciones cónicas, como ser:

- **un punto**, si el plano pasa justo por el vértice del cono (elipse o circunferencia degenerada)

- **una recta**, si el plano es tangente al cono y contiene solo una generatriz (parábola degenerada)
- **un par de rectas que se intersectan**, si el plano contiene al eje del cono (hipérbola degenerada)

A continuación se va a expresar una propiedad analítica común de las secciones cónicas y se describirán los distintos elementos geométricos que surgen de ella, así como la forma en que se vinculan entre sí. Se tiene entonces que:

► Para todos los puntos que pertenecen a una sección cónica dada, el cociente entre la distancia de uno de ellos ($P$) a un punto fijo ($F$) y la distancia de ese mismo punto $P$ a una recta fija ($d$), que no contiene al punto fijo, se mantiene constante.

► El cociente de distancias expresado anteriormente se denomina **excentricidad** ($e$) de la cónica, el punto fijo ($F$) se conoce como **foco de la cónica**, mientras que la recta fija ($d$) es la **directriz de la cónica**. Los valores de las excentricidades para las distintas secciones cónicas resultan ser:

- $e = 0$, para una circunferencia
- $0 < e < 1$, para una elipse
- $e = 1$, para una parábola
- $e > 1$, para una hipérbola

En el caso de la circunferencia el foco es el centro de la misma y la directriz se halla en el infinito

► Se verifica que tanto la elipse como la hipérbola poseen dos focos y dos directrices asociadas, mientras que la parábola tiene solo uno de esos elementos.

▶ La recta que contiene al foco y es perpendicular a la directriz se denomina **eje principal de la cónica**. Este eje intersecta a la curva en un punto denominado **vértice de la cónica** (*V*) y se verifica que la sección cónica es simétrica respecto a dicho eje. De esta forma, una elipse y una hipérbola poseen, cada una, dos vértices y una parábola solo uno.

▶ El punto sobre el eje principal de una elipse o una hipérbola que se encuentra equidistante de los dos vértices se denomina **centro de la cónica** (*C*). Por lo tanto, estas dos curvas se llaman cónicas centradas en contraste a la parábola que no posee centro por tener un solo vértice.

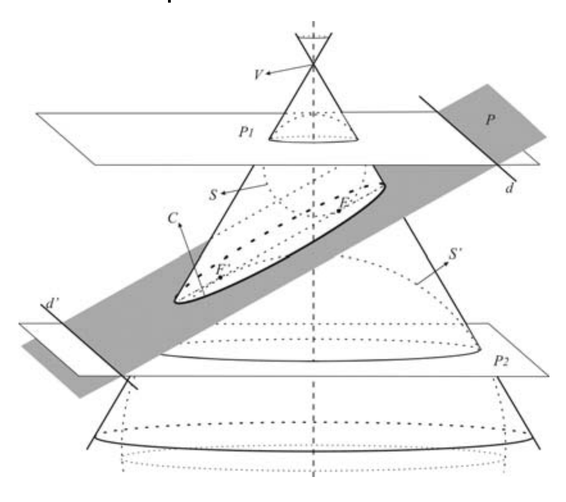



Figura II-18

La visualización de los focos y de las directrices definidas anteriormente se puede hacer en el espacio en forma conjunta con los elementos del cono. Para ello se considera la construcción de la Fig. II-18, donde se ha intersectado un plano *P* con un cono recto y se han dibujado las esferas *S* y *S'* que tienen la propiedad de encontrarse inscriptas en el cono y ser tangentes al plano *P*. Sean entonces, $P_1$ y $P_2$ los planos respectivos de los círculos de contacto de las esferas *S* y *S'* y el cono, estos planos son perpendiculares al eje del cono. Se puede demostrar que: *las directrices y los focos asociados con la sección cónica involucrada (C) son respectivamente las intersecciones de los planos* $P_1$ *y* $P_2$ *con el plano P y los puntos de tangencia de las esferas S y S' con el plano P.*

## 5. Resumen de Fórmulas

Dado un Triángulo Esférico como el indicado en la Fig. I-19, las expresiones dadas por los teoremas vistos en las secciones anteriores son las siguientes:

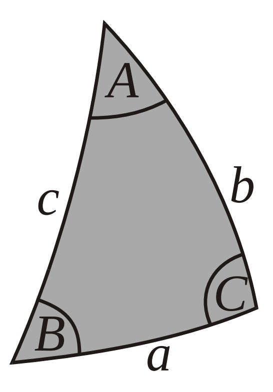


Figura I-19

**Teorema del Seno para Triángulos Esféricos**

$$\frac{sen\ A}{sen\ a} = \frac{sen\ B}{sen\ b} = \frac{sen\ C}{sen\ c}$$

**Teorema del Coseno para Triángulos Esféricos**

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + sen\ b \cdot sen\ c \cdot \cos A$$
$$\cos b = \cos c \cdot \cos a + sen\ c \cdot sen\ a \cdot \cos B$$
$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + sen\ a \cdot sen\ b \cdot \cos C$$

**Fórmula de los Cinco Elementos**

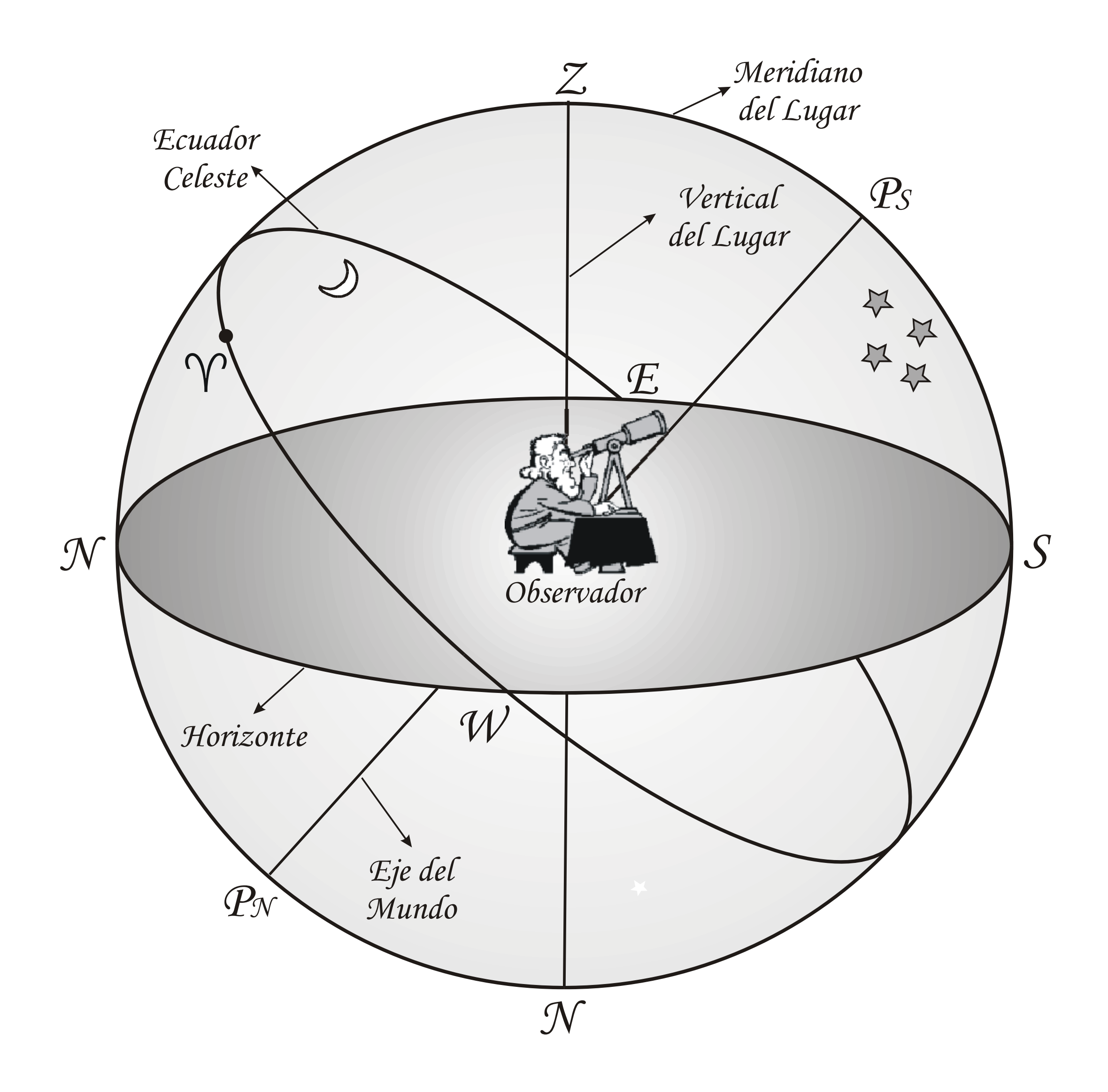
$$sen\ c \cdot \cos A = \cos a \cdot sen\ b - sen\ a \cdot \cos b \cdot \cos C$$
$$sen\ c \cdot \cos B = \cos b \cdot sen\ a - sen\ b \cdot \cos a \cdot \cos C$$

$$sen\ b \cdot \cos A = \cos a \cdot sen\ c - sen\ a \cdot \cos c \cdot \cos B$$
$$sen\ b \cdot \cos C = \cos c \cdot sen\ a - sen\ c \cdot \cos a \cdot \cos B$$

$$sen\ a \cdot \cos B = \cos b \cdot sen\ c - sen\ b \cdot \cos c \cdot \cos A$$
$$sen\ a \cdot \cos C = \cos c \cdot sen\ b - sen\ c \cdot \cos b \cdot \cos A$$

**CAPÍTULO III**

# La Esfera Celeste




La esfera celeste y sus elementos característicos

## 1. Elementos de la Superficie Terrestre y las Coordenadas Geográficas

Las observaciones astronómicas dependen de la posición del observador sobre la superficie terrestre, por lo que es necesario recordar primero algunos conceptos y términos geográficos, que se utilizarán más adelante.

La Tierra tiene una forma casi esférica (ver Fig. III-1). La línea recta imaginaria alrededor de la que la Tierra gira se denomina **eje de rotación**. Este eje corta a la superficie de la Tierra en dos puntos: **el polo norte geográfico** ($PG_N$) y **el polo sur geográfico** ($PG_S$). Este eje posee un plano fundamental asociado que se denomina **ecuador terrestre** y divide a la superficie terrestre en dos hemisferios: **el hemisferio boreal** (que contiene al $PG_N$) y **el hemisferio austral** (que contiene al $PG_S$).

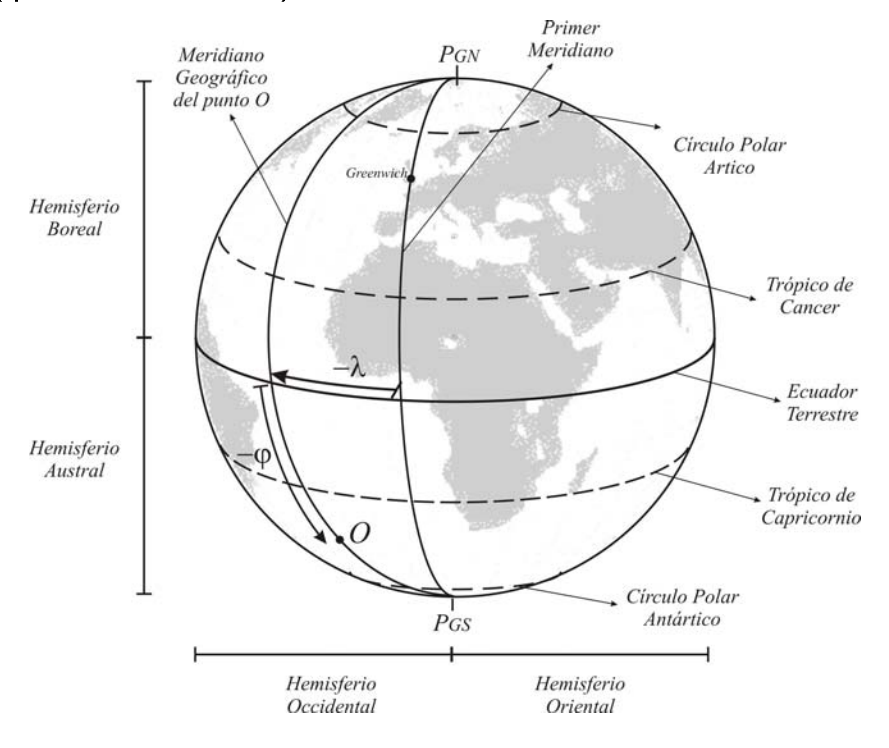



Figura III-1

Los círculos menores, cuyos planos son paralelos al plano del ecuador terrestre, se denominan **paralelos geográficos**, existiendo cuatros de ellos que adquieren nombres particulares. Ellos son:

- **Trópico de Cancer**, a aquél paralelo que se encuentra en el hemisferio boreal a una distancia angular de $\varepsilon = 23° 27'$ del ecuador terrestre.
- **Trópico de Capricornio**, a aquél paralelo que se encuentra en el hemisferio austral a una distancia angular de $\varepsilon = 23° 27'$ del ecuador terrestre.
- **Círculo polar ártico**, a aquél paralelo que se encuentra en el hemisferio boreal a una distancia angular de $\varepsilon = 23° 27'$ del polo norte geográfico.
- **Círculo polar antártico**, a aquél paralelo que se encuentra en el hemisferio austral a una distancia angular de $\varepsilon = 23° 27'$ del polo sur geográfico.

Los círculos mencionados, junto con el ecuador geográfico, dividen a la superficie terrestre en seis zonas:

- **Zona tropical boreal**, entre el ecuador geográfico y el trópico de Cancer
- **Zona templada boreal**, entre el trópico de Cancer y el círculo polar ártico
- **Zona polar boreal**, entre el círculo polar ártico y el polo norte geográfico
- **Zona tropical austral**, entre el ecuador geográfico y el trópico de Capricornio
- **Zona templada austral**, entre el trópico de Capricornio y el círculo polar antártico
- **Zona polar austral**, entre el círculo polar antártico y el polo sur geográfico

El semicírculo máximo que pasa por los polos geográficos de la Tierra y por un punto $O$ genérico de su superficie, se denomina **meridiano geográfico del punto *O***. En particular, el meridiano geográfico que pasa por el Observatorio de Greenwich (Inglaterra), se conoce como **Meridiano origen** o **Primer meridiano**. Este meridiano, junto con el meridiano que dista de este $180°$ dividen la superficie de la Tierra en dos hemisferios: el **hemisferio oriental** y el **hemisferio occidental**.

La posición del punto $O$ mencionado anteriormente se puede determinar (ver Fig. III-1) por el siguiente par de coordenadas:

- **Longitud geográfica ($\lambda$):** Esta se mide sobre el ecuador terrestre desde el punto de intersección del Primer Meridiano con el ecuador terrestre hasta el meridiano que pasa por el punto $O$. En relación al sentido en que se mide, se pueden utilizar dos convenciones:
  - Tomar como sentido a aquel que origine el menor valor para la longitud, detallando el sentido elegido agregando la letra $E$ o la $W$ según se lo haya adoptado hacia el hemisferio oriental o el occidental respectivamente.
  - Adoptar como sentido positivo si el punto $O$ se encuentra en el hemisferio oriental y negativo en caso contrario.

  La longitud geográfica puede expresarse en grados, minutos y segundos de arco (° ‘ “) o en horas, minutos y segundos de tiempo ($h$ $m$ $s$). Los rangos de valores que puede cubrir, según las unidades y la convención de sentidos adoptados pueden ser:

$$0°E \leq \lambda \leq 180°E \quad - \quad 0°W \leq \lambda < 180°W$$

$$0^hE \leq \lambda \leq 12^hE \quad - \quad 0^hW \leq \lambda < 12^hW$$

$$-180° < \lambda \leq +180° \quad - \quad -12^h < \lambda \leq +12^h$$

- **Latitud Geográfica ($\varphi$):** Se mide sobre el meridiano del punto $O$, desde el ecuador terrestre hasta el punto $O$, siendo positiva si este punto se encuentra en el hemisferio boreal y negativa si se halla en el hemisferio austral ($-90° \leq \varphi \leq +90°$).

## 2. Definición y Elementos de la Esfera Celeste

Se denomina **esfera celeste** a aquella esfera imaginaria de radio unidad en cuyo centro se encuentra en el observador ($O$) y sobre la que se proyectan las posiciones de todos los astros. La localización del observador, y con ella el del centro de la esfera, permite distinguir las siguientes situaciones:

- **Esfera topocéntrica:** es la más común y real, ya que consiste en el caso en que el observador se encuentra ubicado en la superficie de la Tierra (ver Fig. III-3a).
- **Esfera geocéntrica:** es aquella que vería un observador imaginario localizado en el centro de la Tierra (ver Figs. III-3b y III-4a).
- **Esfera heliocéntrica:** es aquella que vería un observador imaginario localizado en el centro del Sol (ver Fig. III-4b).

Las diferencias entre ellas son muy pequeñas, y se ven reflejadas en un cambio en las posiciones de los objetos celestes del orden de los segundos de arco Esto es producto de los fenómenos de aberración y de paralaje que se detallaran en el capítulo VII. De forma que la diferencia entre ellas se hace necesaria solo cuando se trabaja con mediciones de precisión.

Independientemente de cuál sea el centro, en cada una de ellas se pueden definir los elementos que se describen a continuación. La línea vertical, definida por la dirección de la plomada, que pasa por el centro de la esfera celeste (ver Fig. III-2) se denomina **vertical del lugar** y la intersecta en dos puntos: uno superior denominado **zenit** o **cenit** ($Z$) y otro inferior denominado **nadir** ($N$). El plano horizontal que pasa por el centro de la esfera, la intersecta en un círculo máximo denominado **horizonte**. Este círculo máximo divide a la esfera celeste en el hemisferio **visible** (que contiene al zenit) y en el hemisferio **invisible** (que contiene al nadir).

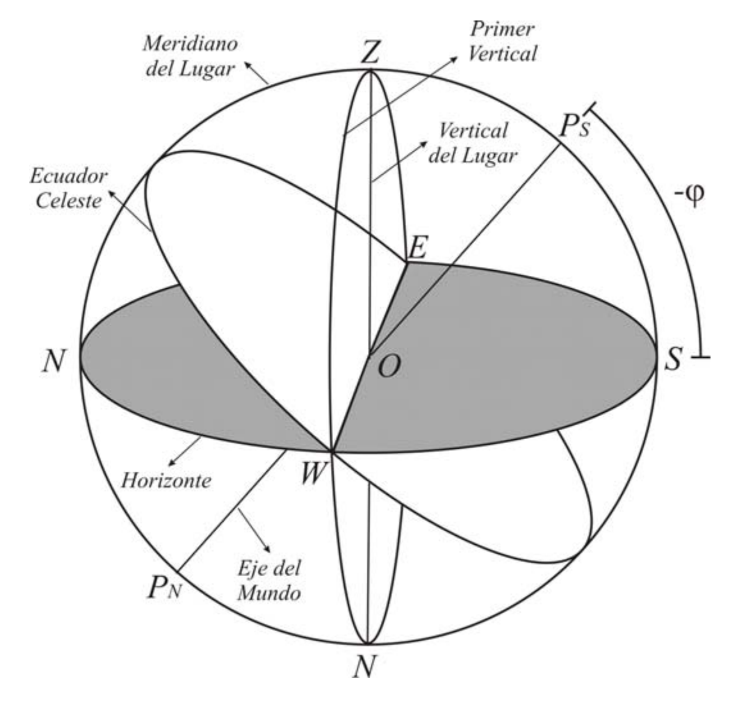



Figura III-2

La esfera celeste realiza una rotación diaria (reflejo de la rotación terrestre). Ella se produce en torno al denominado **eje del mundo**, este eje pasa por el centro de la esfera y la intersecta en los puntos llamados **polo norte celeste** ($P_N$) y **polo sur celeste** ($P_S$). El plano perpendicular al eje del mundo, y que pasa por el centro de la esfera, se intersecta con ella en un círculo máximo llamado **ecuador celeste**. Este círculo máximo divide la esfera celeste en los **hemisferios norte celeste** y **hemisferio sur celeste**.

El plano que contiene a la línea vertical y al eje del mundo es el **plano meridiano** e intersecta a la esfera celeste en un círculo máximo denominado **meridiano del lugar**. La intersección del horizonte con el meridiano del lugar se produce en dos puntos que se conocen como **punto cardinal norte** (*N*) y **punto cardinal sur** (*S*), localizados en forma correspondiente con los polos celestes norte y sur definidos anteriormente. La intersección del ecuador celeste con el horizonte se produce en los puntos denominados **punto cardinal este** (*E*) y **punto cardinal oeste** (*W*). El plano perpendicular al plano meridiano que contiene a la vertical del lugar intersecta a la esfera celeste en un círculo máximo llamado **primer vertical**.

En la Fig. III-3a se ha graficado la proyección sobre el plano del meridiano del lugar de los elementos de una esfera celeste topocéntrica junto con los de la esfera que representa a la Tierra, mientras que en la Fig. III-3b se ha hecho lo mismo pero con una esfera celeste geocéntrica.

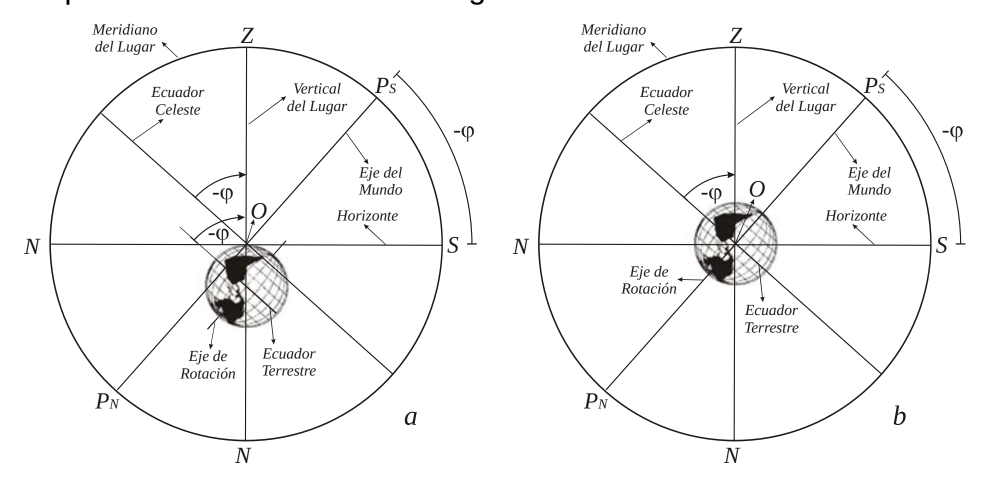



Figura III-3

Se puede apreciar entonces que:

- <u>Para la esfera celeste topocéntrica</u>, el eje del mundo es paralelo al eje de rotación terrestre, el plano del ecuador celeste lo es al plano del ecuador terrestre, mientras que el plano del meridiano del lugar coincide con el plano del meridiano del observador.
- <u>Para la esfera celeste geocéntrica</u>, el eje del mundo coincide con el eje de rotación terrestre, el plano del ecuador celeste lo hace con el plano del ecuador terrestre y el plano del meridiano del lugar coincide con el plano del meridiano del observador.

Las figuras anteriores permiten visualizar que *el ángulo de inclinación del eje del mundo con respecto al horizonte (o el arco del meridiano celeste medido desde el polo norte celeste al horizonte), viene dado por el valor de la latitud geográfica del lugar de observación ($\varphi$)*. Se verifica entonces que, si el valor de la latitud es positiva, el polo norte celeste se encuentra por encima del horizonte, mientras que si es negativo se halla por debajo de él como es el caso de las Figs. III-2 y III-3.

En la Fig. III-4a se ha representado una esfera celeste geocéntrica sobre la que se ha indicado el movimiento **anual** del Sol (reflejo de la traslación terrestre). Este movimiento se lleva a cabo a lo largo de un círculo máximo denominado **Eclíptica**. La eclíptica presenta un ángulo con respecto al ecuador celeste dado por $\varepsilon = 23° 27'$. La línea perpendicular al plano que contiene a la eclíptica y que pasa por el centro de la esfera celeste la intersecta en dos puntos llamados **polo norte eclíptico** ($\Pi_N$) y **polo sur eclíptico** ($\Pi_S$). Además, la eclíptica se intersecta con el ecuador celeste en dos puntos llamados **equinoccios**:

♈: Punto Vernal o Punto Aries
♎: Punto Libra

mientras que los puntos situados a *90°* de ellos sobre la eclíptica, en los que el Sol alcanza su máxima separación angular del ecuador, se conocen como **solsticios** (♋ y ♑).

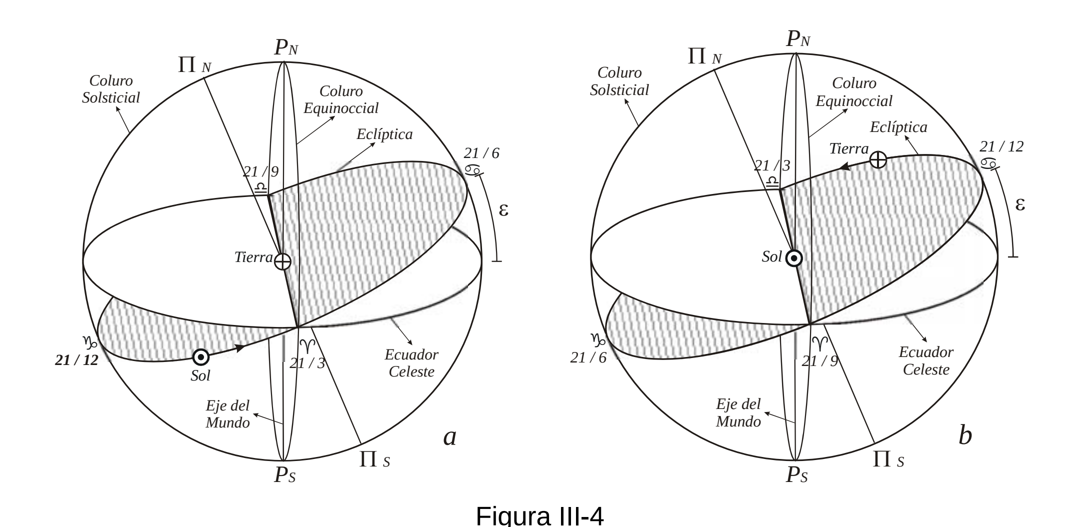


Figura III-4

Los círculos máximos que pasan por los polos celestes ($P_N$ y $P_S$) y por los solsticios y los equinoccios se los conoce como **coluro solsticial** y **coluro equinoccial** respectivamente. En la Fig. III-4a se indican además, las fechas del año (aproximadas) en las que el Sol se encuentra en los equinoccios y en los solsticios.

Es de notar que, a diferencia de todos los elementos mencionados hasta el momento, al rotar la esfera celeste en su movimiento diurno, la eclíptica (y todos los elementos asociados con ella) lo hace también en forma solidaria manteniéndose constante el valor de la inclinación $\varepsilon$.

La Fig. III-4b es similar a la anterior, pero ella se trata de una esfera celeste heliocéntrica, por lo que la que se mueve sobre la eclíptica es la Tierra y las fechas allí indicadas representan las fechas del año (aproximadas) en las que su proyección coincide con las direcciones a los solsticios y a los equinoccios "vistos desde el Sol".

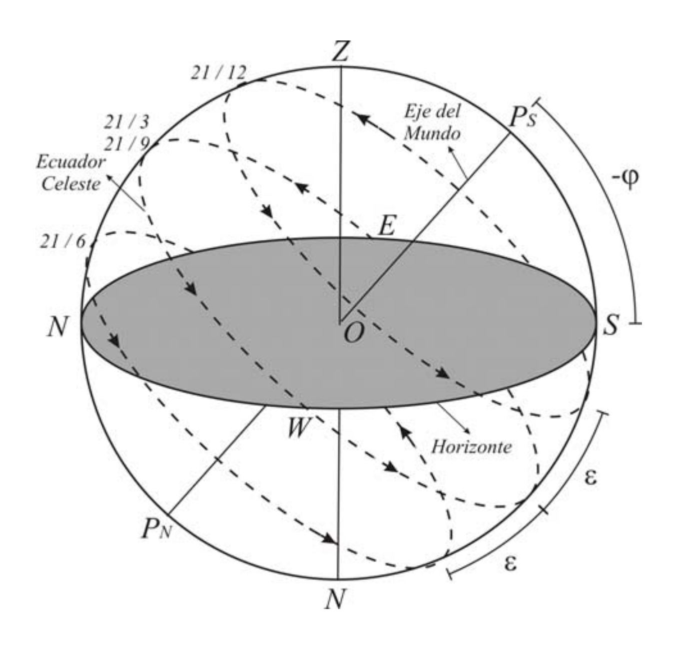



Figura III-5

En la Fig. III-5 se muestra el <u>movimiento **diurno** del Sol</u> para los casos de las fechas indicadas en la Fig. III-4a, para un observador ubicado en el hemisferio sur terrestre ($\varphi < 0°$). Se observa entonces que:

- Tanto los lugares de salida y puesta del Sol como el tiempo que este permanece por encima del horizonte varían a lo largo del año.

- El Sol saldrá exactamente por el este (*E*) y se podrá exactamente por el oeste (*W*), solo dos veces en el año, que es cuando se encuentre en los equinoccios.
- El día mas corto y el más largo del año se producirán cuando el Sol se encuentre en uno de los solsticios.

Otro plano importante en la esfera celeste es aquel asociado con la simetría de la Galaxia, denominado **plano galáctico**, y cuya intersección con la esfera celeste es el **círculo galáctico** (ver Fig. III-6), mientras que los polos correspondientes son los **polos galácticos** ($G_N$ y $G_S$).

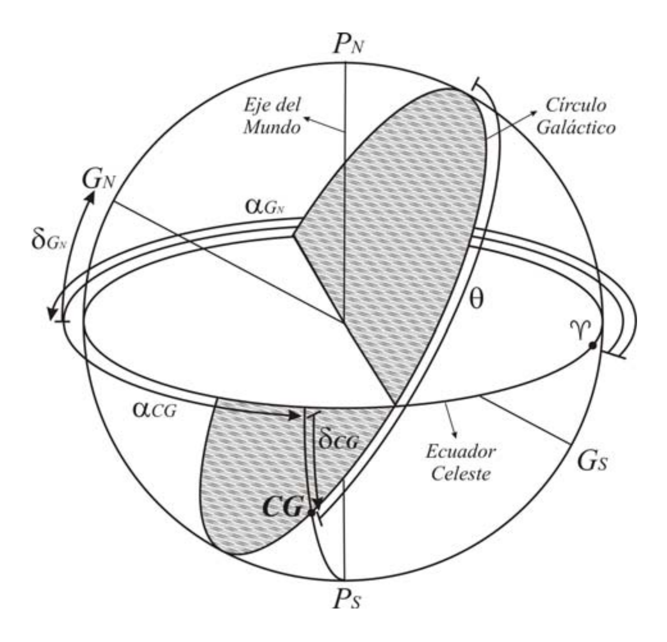



Figura III-6

Este círculo máximo y sus polos se ubican respecto al ecuador celeste a través de las coordenadas ecuatoriales celestes (ver sec. 1.3. del capítulo V mas adelante) del polo galáctico norte, las que toman los siguientes valores:

$$\alpha_{GN(2000)} = 12^h\ 51^m\ 26.282^s$$

$$\delta_{GN(2000)} = +27°\ 07'\ 42.01''$$

Dentro del círculo galáctico, un punto que se destaca es aquel en que indica la dirección hacia el centro galáctico (*CG*) localizado en la constelación de Sagitario. La posición precisa viene dada por el par de coordenadas:

$$\alpha_{CG(2000)} = 17^h\ 45^m\ 37.224^s$$

$$\delta_{CG(2000)} = -28°\ 56'\ 10.23''$$

o por medio del valor del arco $\theta$ indicado en la Fig. III-6, el que toma el valor:

$$\theta_{(2000)} = 122.932°$$

Se observa que, en forma similar a lo que sucede con el ecuador celeste y la eclíptica, el ecuador celeste y el plano galáctico rotan alrededor del eje del mundo en forma solidaria.

Cabe notar que el subíndice *(2000)* indicado en los valores de las distintas coordenadas se refiere a la época a que corresponden, ya que ellas varían debido al fenómeno de precesión (ver capítulo VII mas adelante).

## 3. Situaciones Geográficas Particulares

En esta sección se consideraran las diferentes características que presentan los astros según sea la ubicación geográfica del observador (básicamente su latitud geográfica, φ).

### 3.1. Primer Clasificación

En principio, de acuerdo con el valor que toma la latitud geográfica del observador ($\varphi$), se pueden distinguir tres casos:

- **Esfera Paralela ($\varphi$ = +90° o $\varphi$ = - 90°):** En este caso el observador se encuentra en uno de los polos geográficos, verificándose entonces que uno de los polos celestes coincide con el zenit, el otro con el nadir y el ecuador celeste lo hace con el horizonte. De esta forma el movimiento diurno se efectúa en forma paralela al horizonte (ver Figs. III-7 y III-8). En esta situación solo son visibles la mitad de los astros de la esfera celeste y todos ellos son circumpolares, o sea que nunca salen ni se ponen.

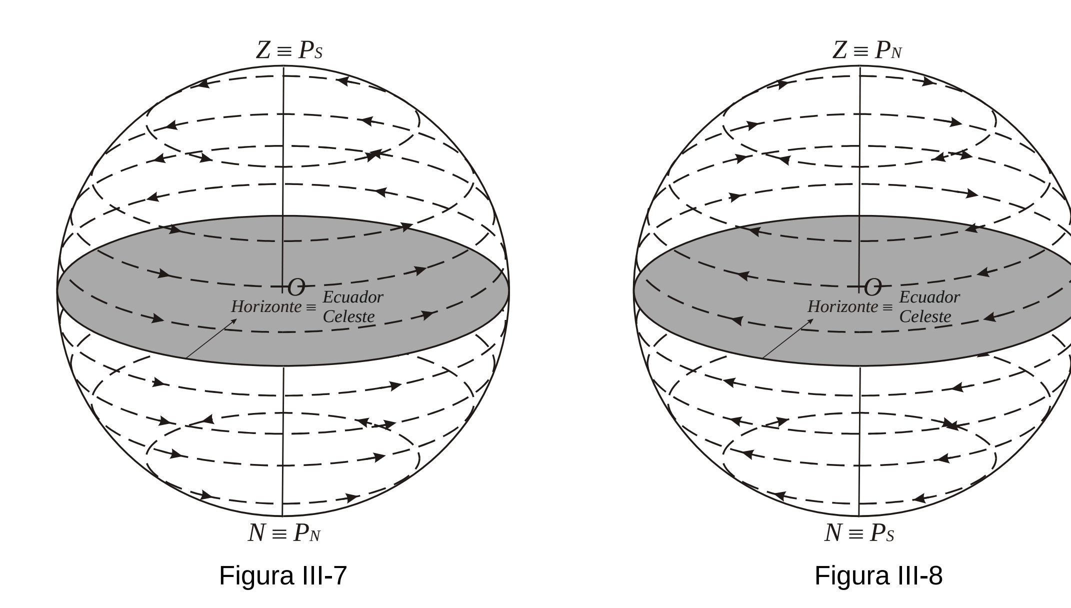



Figura III-7

Figura III-8

- **Esfera Recta ($\varphi$ = $0°$):** Ahora el observador se halla ubicado en un punto del ecuador geográfico, por lo que los polos celestes coinciden con sus correspondientes puntos cardinales y el ecuador celeste lo hace con el primer vertical. Como consecuencia todos los astros se mueven en círculos perpendiculares al horizonte (ver Fig. III-9). En este caso son visibles todos los astros de la esfera celeste permaneciendo todos ellos $12^h$ por encima del horizonte.

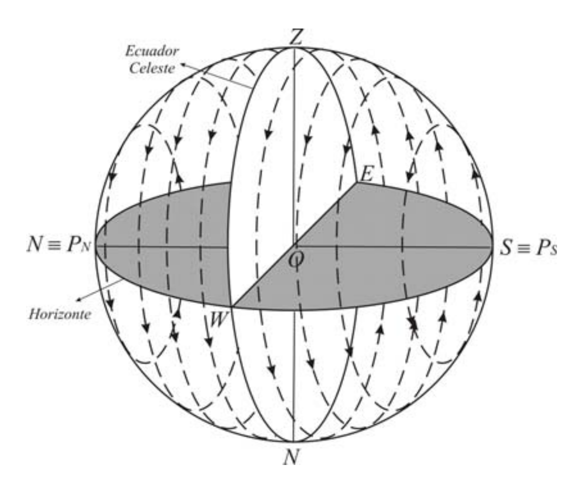



Figura III-9

- **Esfera Oblicua ($0°$ < |$\varphi$| < $90°$):** Este es el caso más común y es en el que los astros intersectan al horizonte formando un cierto ángulo distinto de $90°$ (ver Figs. III-10 y III-11)

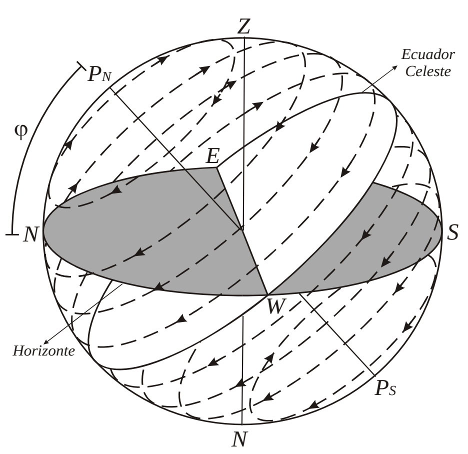



Figura III-10

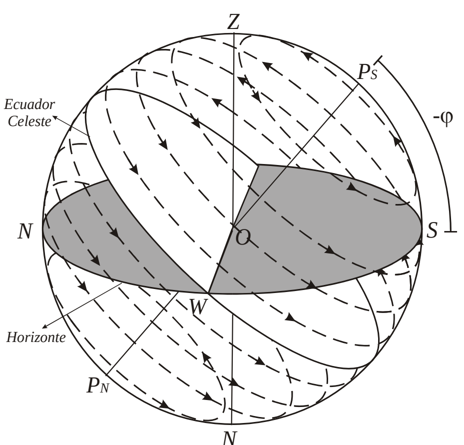



Figura III-11

### 3.2. Segunda Clasificación

Otra forma de clasificar las distintas situaciones que surgen de acuerdo con el valor que toma la latitud geográfica del observador, es teniendo en cuenta que en la sec. 1 se mencionó que existen cuatro paralelos geográficos particulares (los trópicos y los círculos polares, ver Fig. III-1).

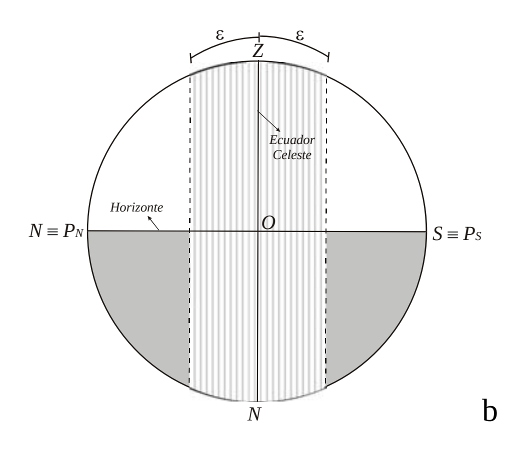
La localización de esos paralelos, con $\varphi = \pm\varepsilon$ para el caso de los trópicos y con $\varphi = \pm(90°-\varepsilon)$ para el caso de los círculos polares, se relaciona evidentemente con la forma en que el Sol se visualiza desde las regiones que ellos (junto con el ecuador geográfico) delimitan. Se pueden presentar, entonces, las 13 situaciones planteadas en las Figs. III-12 a III-24. Estas figuras se pueden describir de una forma general de la siguiente forma:

- Cada una de esas figuras consta de dos partes: en su parte "a" se indica la zona en la que se encuentra el observador sobre la superficie terrestre y en la parte "b" aparecen las correspondientes esferas celestes (con sus elementos proyectados sobre el plano meridiano para mayor claridad). En estos últimos gráficos se detalla en forma rallada la zona de la esfera en la que se puede encontrar el Sol en algún momento del año, mientras que las zonas claras y oscuras distinguen los hemisferios visible e invisible respectivamente.
- Las figuras indicadas a la izquierda corresponden a las situaciones que se presentan en el hemisferio boreal, mientras que aquellas indicadas a la derecha corresponden a las situaciones similares en el hemisferio austral.
- Debajo de cada figura se detallan las características más relevantes del comportamiento del Sol en cada zona.

Ecuador Geográfico ($\varphi = 0°$)



a




b

Figura III-12

Características:

- Aquí se tiene la situación de **esfera recta** (ver sec. 3.1) , donde el movimiento diurno se efectúa en forma perpendicular al horizonte.
- Los días y las noches poseen la misma duración para cualquier fecha del año.
- El Sol solo pasa por el cenit al mediodía de las fechas de los equinoccios. En estos casos entonces una varilla vertical no proyecta sombra.

Zonas Tropicales ($0° < \varphi < \varepsilon$ o $-\varepsilon < \varphi < 0°$)

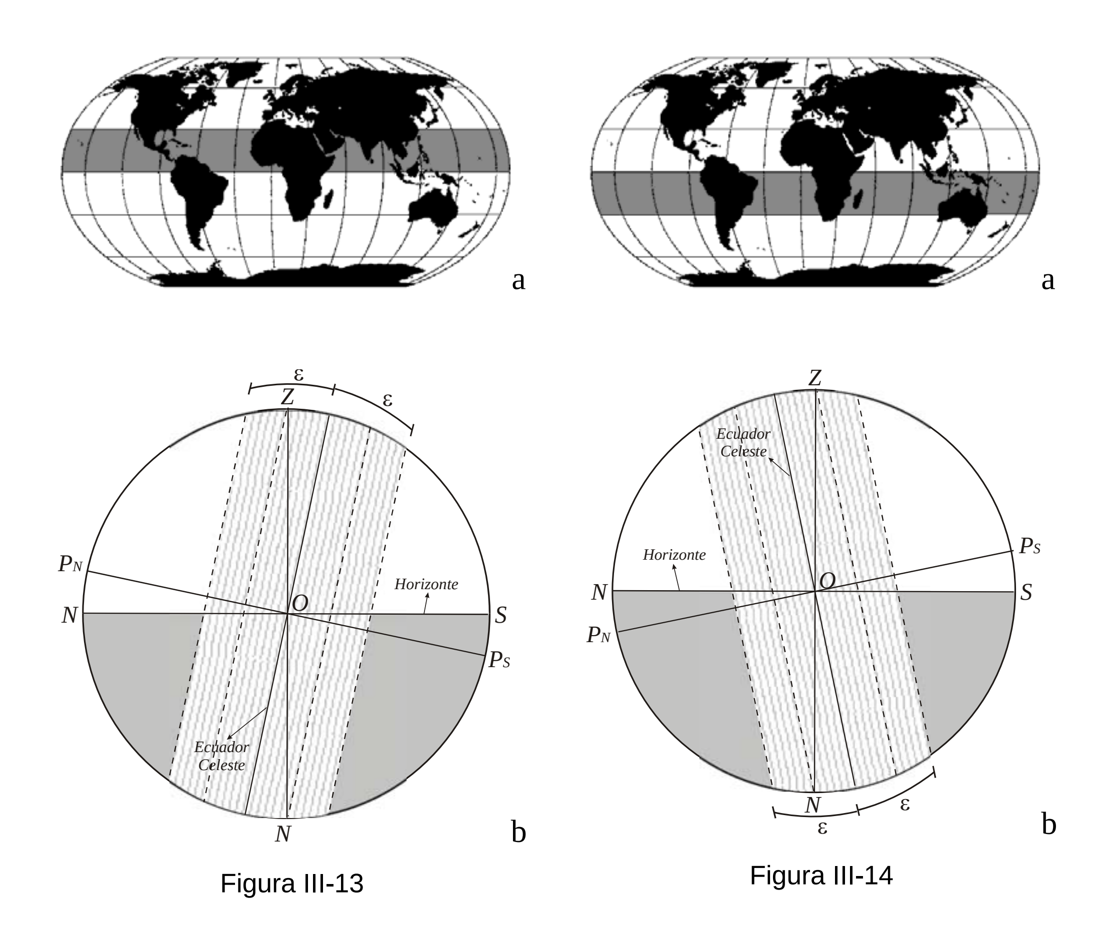


Figura III-13

Figura III-14

Características:

- El Sol pasa por el cenit al mediodía en dos fechas del año, aunque ahora no se trata de los equinoccios, sino que dependerá del valor de la latitud del lugar en consideración.
- Tanto en el Ecuador como en las zonas tropicales, excepto el par de fechas mencionadas en el punto anterior, la sombra de una varilla al mediodía proyectará una sombra hacia el punto cardinal norte o hacia el punto cardinal sur, con lo cual, a diferentes horas y a lo largo del año dicha sombra se podrá proyectar en estos lugares de la Tierra en todos los rumbos posibles.

Trópicos ($\varphi = \varepsilon$ o $\varphi = -\varepsilon$)

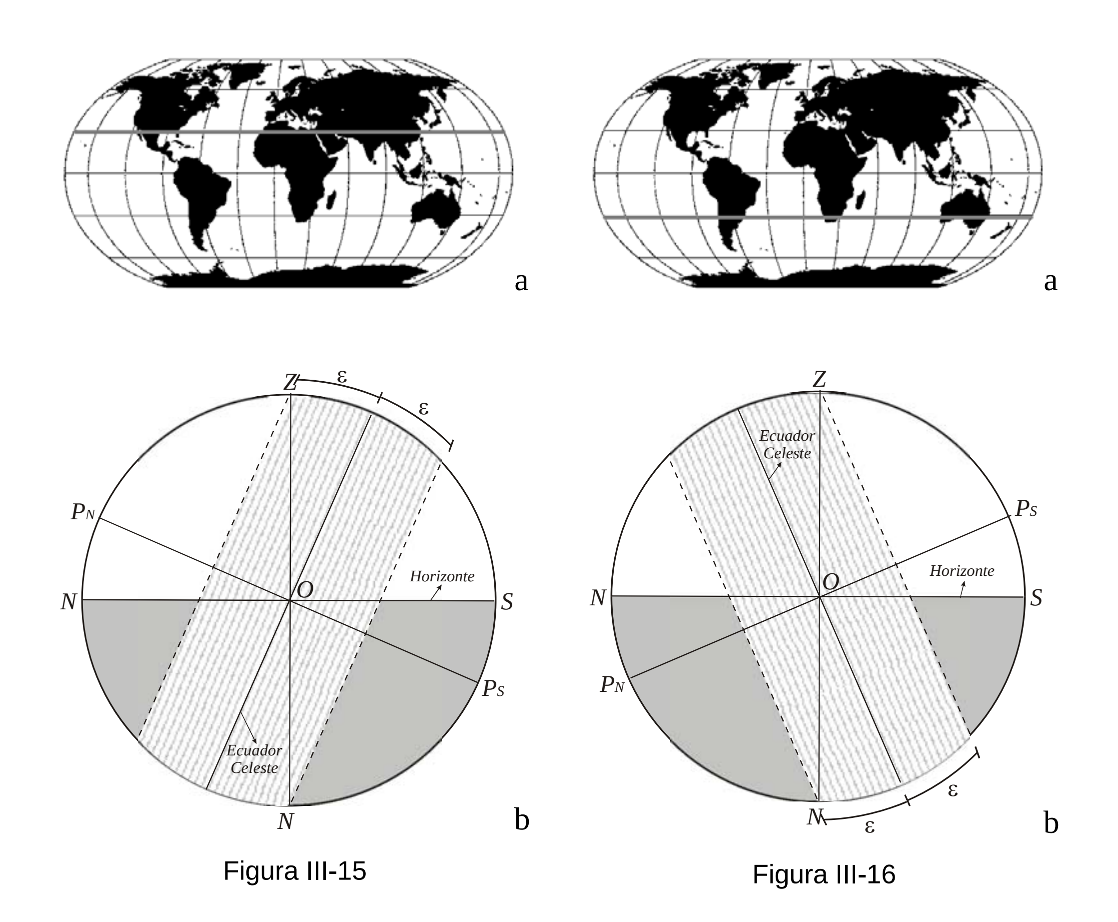



Figura III-15

Figura III-16

Características:

- El Sol pasa por el cenit a mediodía en la fecha del respectivo solsticio, por lo que en ese instante, la eclíptica coincide con el plano vertical.

Zonas Templadas ($\varepsilon < \varphi < (90°\text{-}\varepsilon)$ o $-\varepsilon < \varphi < -(90°\text{-}\varepsilon)$)

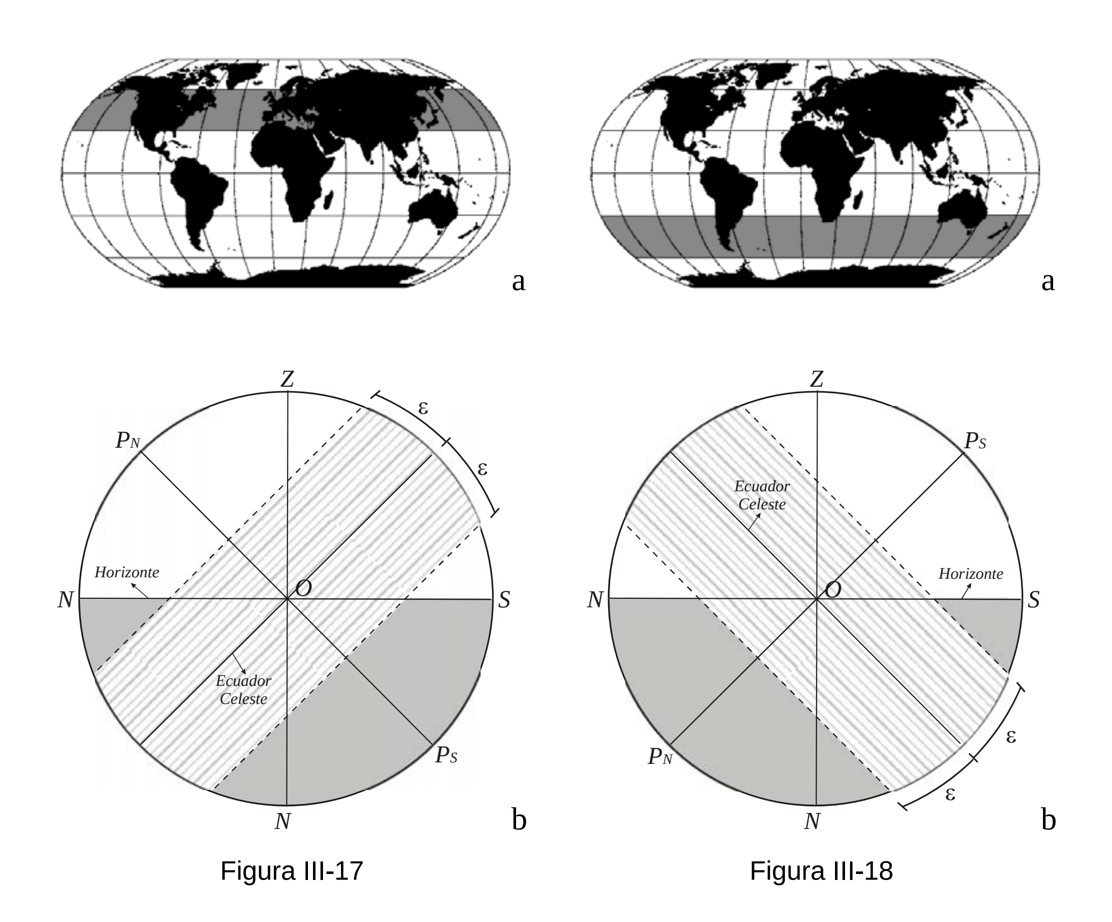



Figura III-17

Figura III-18

Características:

- El Sol <u>nunca</u> alcanza el cenit
- Para un observador en el hemisferio norte, Sol se encuentra al mediodía exactamente hacia el punto cardinal sur
- Para un observador en el hemisferio sur, el Sol se encuentra al mediodía exactamente hacia el punto cardinal norte

Círculos Polares ($\varphi = (90°\text{-}\varepsilon)$ o $\varphi = \text{-}(90°\text{-}\varepsilon)$)

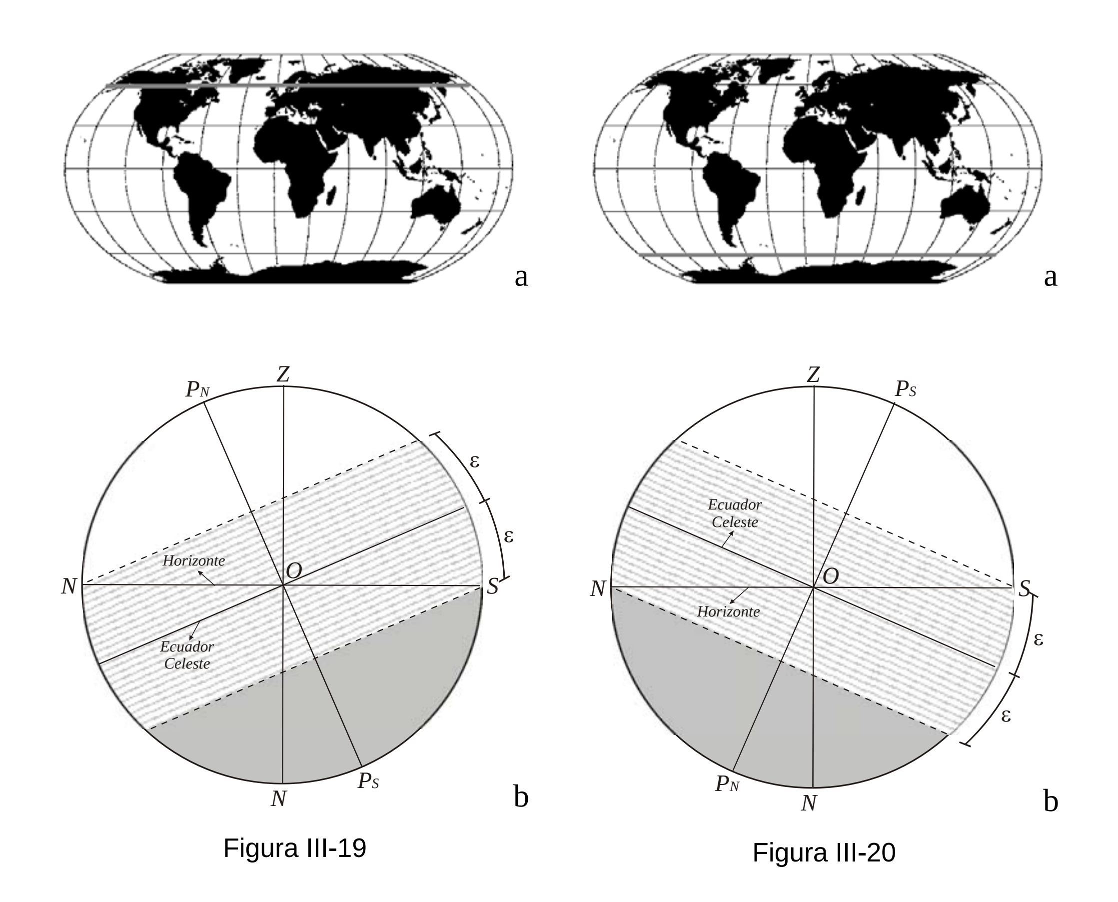



Figura III-19

Figura III-20

Características:

- Hay un día al año que transcurre sin noche y una noche sin día.
- Esas situaciones particulares ocurren en las fechas de los solsticios. En esas fechas, la eclíptica coincide con el horizonte.

Zonas Polares (($90°-\varepsilon) < \varphi < 90°$ o $-(90°-\varepsilon) < \varphi < -90°$)

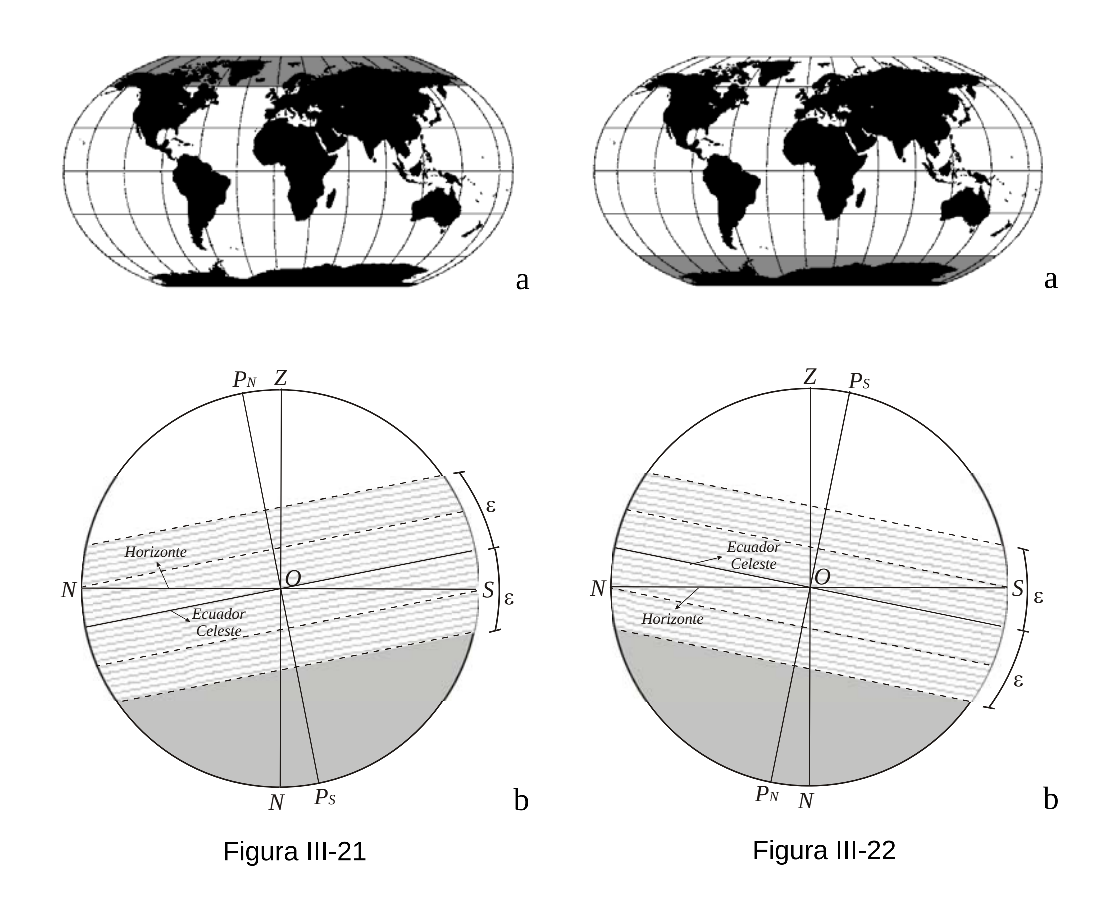



Figura III-21

Figura III-22

Características:

- Durante la primavera y el verano los días son extremadamente largas y las noches extremadamente cortas
- Durante el otoño y el invierno los días son extremadamente cortos y las noches extremadamente largas
- Existen períodos de tiempo en un año en los que el Sol no sale ni se pone. De esta forma, hay días y noches que se prolongan por varias fechas consecutivas.

Polos Geográficos ($\varphi = 90°$ o $\varphi = -90°$)

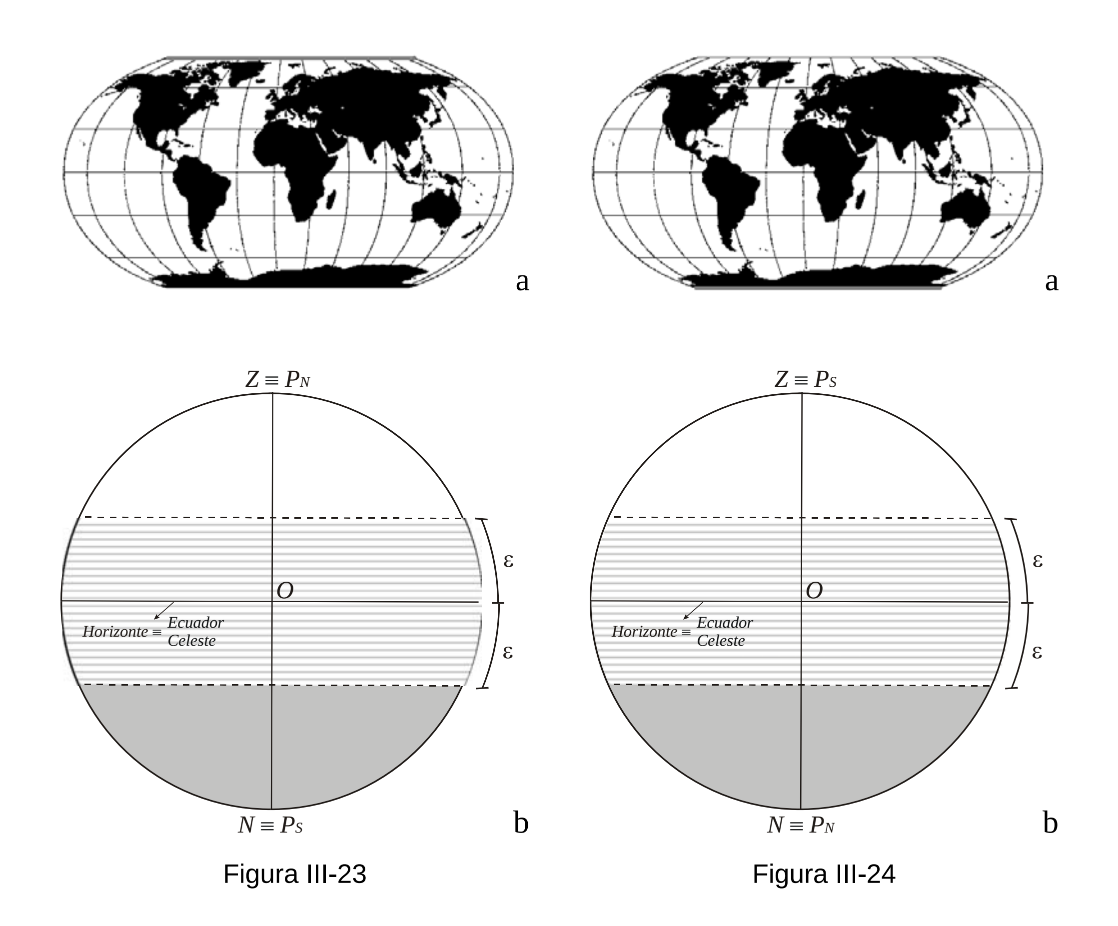


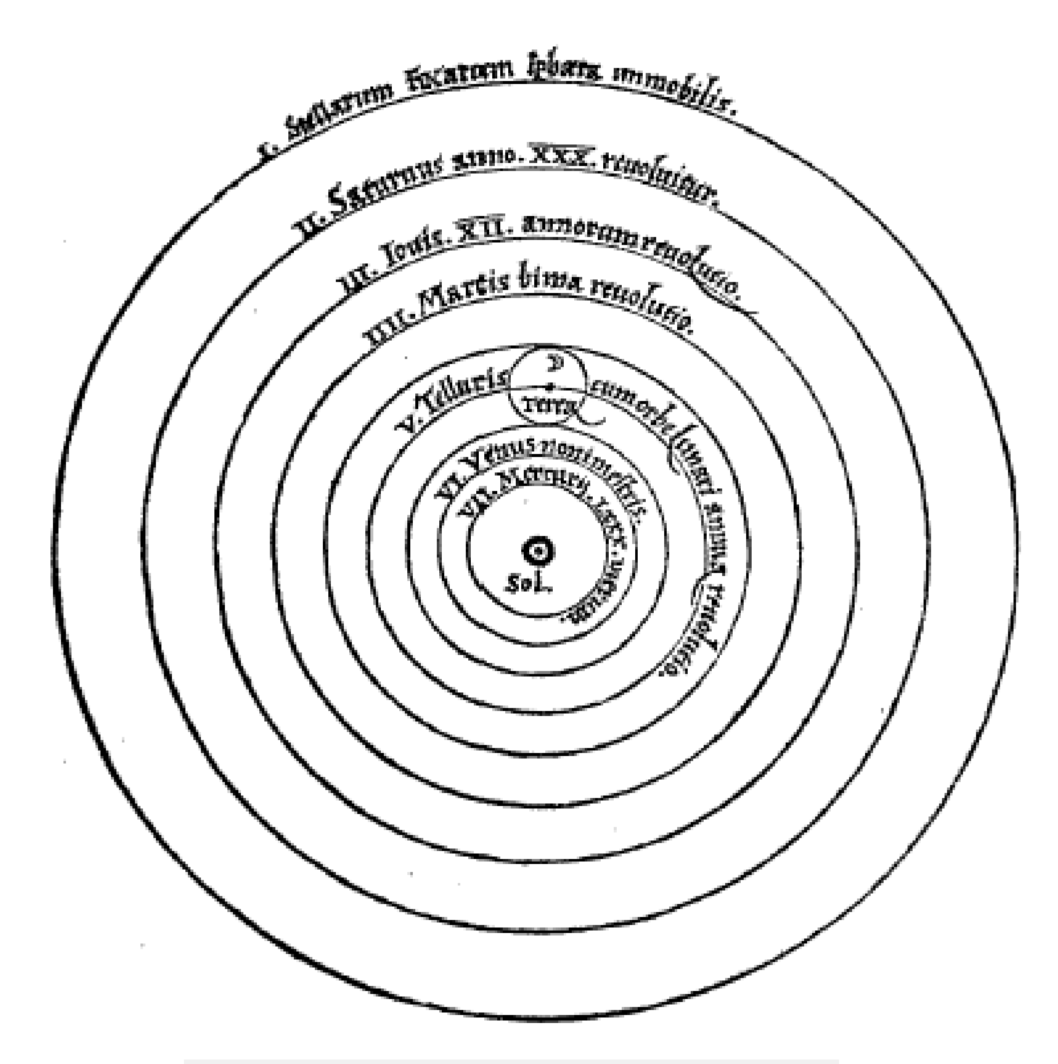

Figura III-23 Figura III-24

Caracterísitcas:

- En este caso se trata de la **esfera paralela** (ver sec. 3.1), donde el movimiento diurno se efectúa en forma paralela al horizonte.
- El Sol se hallará todo el día por debajo o por encima del horizonte, dependiendo de la época del año que se trate.
- Los amaneceres y los atardeceres se producirán solo durante los equinoccios. En consecuencia, en los polos geográficos se tiene "un día y una noche" de seis meses de duración cada uno.

## CAPÍTULO IV

# Los Sistemas Astronómicos




Sistema Heliocentrico de Copérnico incluido en su obra
"De Revolutionibus Orbium Coelestium"

## 1. Movimientos de los Planetas sobre el fondo de las Estrellas

Para determinar la trayectoria o el recorrido de un planeta cualquiera, con respecto a las estrellas de fondo, basta con fijar la posición en la que se encuentra sobre la esfera celeste durante varias noches consecutivas, valiéndose para ello de un sistema de coordenadas ecuatoriales celestes o uno de coordenadas eclipticales (ver capítulo V).

Observando la trayectoria obtenida, se notan entonces las siguientes características:

- La trayectoria planetaria sobre el cielo es una curva sinuosa recorrida por el astro con velocidad angular variable
- El sentido del desplazamiento cambia, siendo generalmente directo (de oeste a este) y algunas veces retrógrado (de este a oeste). Se nota que la velocidad angular máxima en uno u otro sentido se registra en general cuando el planeta se encuentra en las posiciones de **conjunción** (dirección similar al Sol) y **oposición** (dirección opuesta al Sol).
- Durante todo el movimiento, el planeta se aparta muy poco del plano de la eclíptica, estando en ocasiones situado al norte de ella y en otras al sur.

### 1.1. Sistema Geocéntrico

El sistema geocéntrico fue establecido precariamente por Aristóteles y refinado por Ptolomeo (siglo II d.C.), quien lo basa en las siguientes leyes:


Ptolomeo

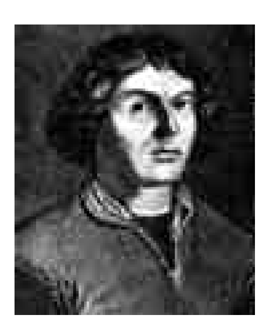
1. Los cuerpos celestes describen círculos alrededor de la Tierra.
2. La Tierra es esférica.
3. La Tierra ocupa el centro de la esfera celeste.
4. La Tierra no tiene movimientos.

Para explicar los avances y retrocesos observados en las trayectorias de los planetas, Ptolomeo aplicó a su sistema la **teoría de los epiciclos y deferentes** concebida por Hiparco tres siglos antes. Según ella, los planetas se mueven sobre círculos (epiciclos), cuyos centros se mueven a su vez sobre otros círculos (deferentes) centrados en la Tierra.

Este sistema explicaba bastante bien las posiciones de los planetas, aunque no las predecía con la suficiente precisión. Ello llevó a introducir variantes, como no centrar los círculos en la Tierra e introducir otros círculos adicionales. Ello hizo que el sistema se tornara bastante complejo, aunque sobrevivió hasta fines de la Edad Media.

**1.2. Sistema Heliocéntrico**

Recién en el siglo XVI, el cura polaco Nicolás Copérnico (1473-1543), expuso un nuevo sistema en su obra **De Revolutionibus Orbium Coelestium (1543)**. Este sistema se basaba en las siguientes afirmaciones:


N. Copérnico

1. Es el Sol, y no la Tierra, el astro que se encuentra en el centro del Universo.
2. La Tierra es una esfera que gira alrededor de su eje en un día (rotación).
3. La Tierra, al igual que los demás planetas, gira alrededor del Sol en un año (traslación).
4. Todos los movimientos se explican como combinaciones de **movimientos circulares uniformes**.

De esta manera, el movimiento observado de la esfera de las estrellas fijas es un reflejo de la rotación de la Tierra, y tanto los epiciclos de Ptolomeo como el movimiento del Sol sobre el fondo de estrellas es un reflejo del movimiento de traslación de la Tierra.

Este sistema tenía la ventaja de ser bastante más simple que el de Ptolomeo, pero todavía presentaba ciertas inconsistencias, ya que si era correcto, las posiciones de cada una de las estrellas debían reflejar también el movimiento de la Tierra, como lo hacían los planetas, hecho que no era observado. Una justificación para esa falencia era suponer que las estrellas se encontrasen a una distancia superior a 1000 veces la distancia Tierra-Sol, lo que en esa época se consideraba como algo inconcebible.

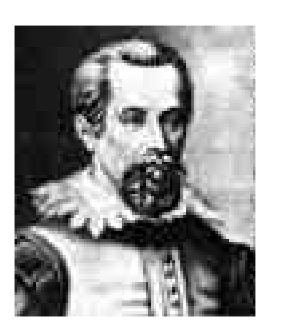
La consolidación del sistema heliocéntrico correspondió a Galileo, quién utilizando un telescopio, observo los satélites mayores de Júpiter, indicando que no todo gira alrededor de la Tierra, y las fases de Venus, probando irrefutablemente que este planeta gira alrededor del Sol.

## 2. Las Leyes de Kepler y la Gravitación Universal

Casi al mismo tiempo que Galileo trataba de imponer las ideas nuevas en Italia, Kepler en Alemania enunciaba las **leyes del movimiento planetario**. Posteriormente, basándose en estas leyes, Newton ideó las bases de **Mecánica Celeste**, demostrando que los astros se hallan gobernados en sus movimientos por los mismos principios que gobiernan los cuerpos en la superficie de la Tierra.

### 2.1. Las Leyes de Kepler

Johannes Kepler (1571-1630) fue ayudante de Tycho Brahe y, luego de la muerte de este, utilizó las observaciones precisas que él había efectuado de las posiciones de los planetas, deduciendo a partir de ellas las siguientes leyes (entre 1609 y 1618):



J. Kepler

**Primera Ley:** *La órbita que describe cada planeta es una elipse con el Sol en uno de sus focos.*

**Segunda Ley:** *Cada planeta se mueve de tal manera que, el radio vector (recta que une los centros del Sol y del planeta) barre áreas iguales en tiempos iguales.*

**Tercera Ley:** *Los cuadrados de los tiempos empleados por los planetas en describir sus órbitas, son proporcionales a los cubos de sus distancias medias al Sol.*

### 2.1.1. Descripción de las Leyes de Kepler

#### Primera Ley

Se entiende por órbita a la trayectoria realizada por cualquier cuerpo celeste. Una **elipse**, ya presentada en el capítulo II, puede ser definida como el conjunto de puntos del plano tal que la suma de las distancias de cada uno de ellos a un par de puntos $F_1$ y $F_2$ (separados entre sí una distancia $2c$) se mantiene constante ($= 2a$). Una elipse se caracteriza por el valor de su **semieje mayor** $a$ y de su excentricidad $e = c/a$ ($0 < e < 1$). Otro parámetro usado es el **semieje menor** $b$ y se verifican las siguientes relaciones (ver Fig. IV-1):

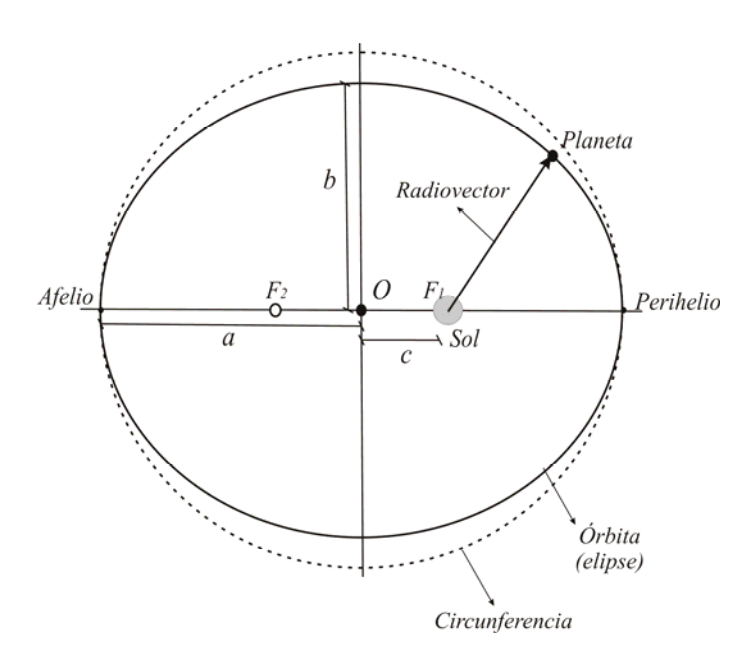



Figura IV-1

$$a^2 + b^2 = c^2 = (ae)^2$$
$$b = a\sqrt{1-e^2}$$

Como se ha visto en el capítulo II, si $e = 0$ la elipse se transforma en una **circunferencia**, mientras que si $e = 1$, ella se transforma en una **parábola**.

## Segunda Ley

El **radio vector** $r$ es la línea que une el centro del Sol y del planeta. Esta línea varía a lo largo del tiempo, tomando un valor mínimo en el **perihelio** ($r = a(1 - e)$) y máximo en el **afelio** ($r = a(1 + e)$). Dado que la "Segunda Ley" establece que la **velocidad areal** (área barrida por el radio vector por unidad de tiempo) es constante (ver Fig. IV-2 donde $A_1 = A_2$), el planeta se moverá más rápido cuando se localice cerca del perihelio que cuando se halle cerca del afelio. O en general, se puede decir que la velocidad del planeta a lo largo de su órbita es variable.

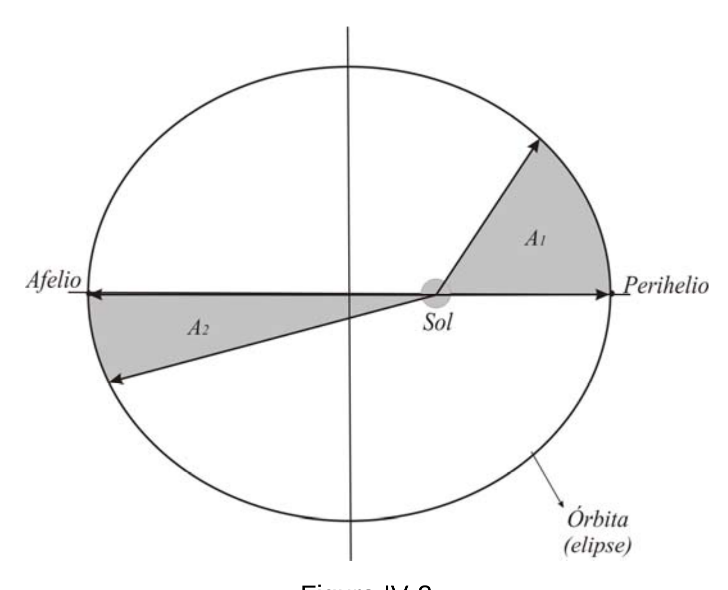



Figura IV-2

**Tercera Ley**

Si $a$ es la distancia media de un planeta al Sol y $T$ es su respectivo **período sidéreo** de revolución alrededor del Sol, entonces la “Tercera Ley” indica que:

$$T^2 \alpha\ a^3 \rightarrow \frac{T^2}{a^3} = C$$

siendo $C$ es una constante. Entonces, si se considera un par de planetas $P_1$ y $P_2$ cuyas distancias medias y períodos sidéreos son respectivamente $a_1$, $a_2$ y $T_1$, $T_2$, se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}$$

y si ahora se considera que uno de esos planetas ($P_2$) es la Tierra ($a_2 = 1\ UA$ y $T_2 = 1\ año$), mientras que el otro ($P_1$) es un planeta genérico ($a_1 = a$ y $T_1 = T$) resulta que:

$$\frac{T^2}{a^3} = 1$$

$$T^2 = a^3$$

donde se debe recalcar que para que esta expresión tenga validez, el período sidéreo $T$ debe estar expresado en *años* y la distancia media a en *UAs*.

## 2.2. La Ley de Gravitación Universal

La ley de gravitación universal fue descripta por Isaac Newton, y publicada por primera vez en 1686. Ella puede enunciarse de la siguiente manera:



I. Newton

> **Ley de Gravitación Universal:** *Dos cuerpos cualesquiera, se atraen con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.*

Denominando, entonces, como $m_1$ y $m_2$ a las masas de los dos cuerpos y como $d$ a la distancia que los separa, la expresión matemática de la fuerza $F$ con que se atraen mutuamente viene dada por:

$$F \,\alpha\, \frac{m_1\, m_2}{d^2} \qquad \text{o} \qquad F = G\,\frac{m_1\, m_2}{d^2}$$

donde $G$ es la denominada **constante de gravitación universal**, y cuyo valor es

$$G = 6.67 \ x\ 10^{-8} \ dinas\, cm^2 / g^2$$

Utilizando esta ley, Newton fue capaz de deducir las leyes de Kepler dentro de un marco teórico más general.

### 2.2.1. Las Leyes de Kepler de acuerdo con la Ley de la Gravitación

#### Primera Ley

De acuerdo con la ley de gravitación universal un cuerpo $A$ que se mueve bajo la acción de la gravedad de otro $B$ describe una órbita que es una sección

cónica (ver sec. 4.2 del capítulo II) con el cuerpo *B* localizado en uno de los focos de esa figura (ver Fig. IV-3).

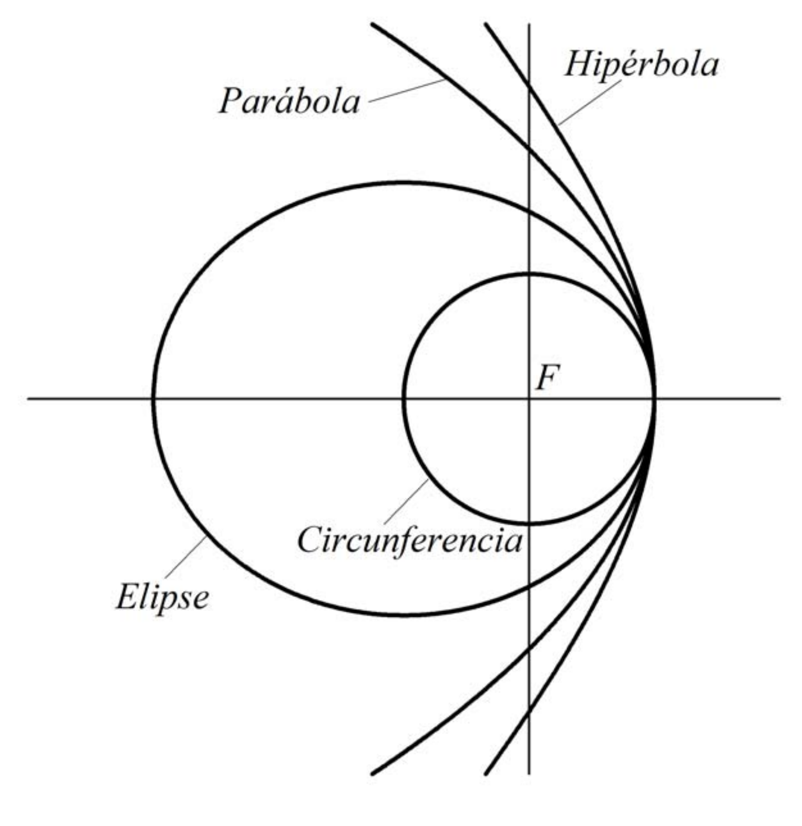



Figura IV-3

La órbita del cuerpo puede ser entonces:

- una circunferencia ($e = 0$),
- una elipse ($0 < e < 1$),
- una parábola ($e = 1$) ó
- una hipérbola ($e > 1$).

En los dos primeros casos se dice que el cuerpo *A* posee una órbita cerrada, mientras que en los otros dos posee una órbita abierta.

**Segunda Ley**

La ley encontrada por Newton permite deducir que la velocidad areal es constante cualquiera sea la figura cónica que describe el astro *A*, no solo si se

trata de una elipse como había deducido Kepler originalmente. Además, no sólo se encuentra que la velocidad del cuerpo $A$ es variable a medida que recorre su órbita, sino que permite cuantificarla mediante la siguiente expresión:

$$v = \sqrt{G\,(m_A + m_B)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

conocida como **Ecuación de la Energía**.

Se tienen dos casos particulares que vale la pena analizar más detalladamente. Ellos son:

- Cuando la órbita es una circunferencia ($r = a$), se obtiene la velocidad circular ($v_C$):

$$v_C = \sqrt{\frac{G\,(m_A + m_B)}{r}}$$

- Cuando la órbita es una parábola ($a \to \infty$), se obtiene la velocidad parabólica ($v_P$) o velocidad de escape:

$$v_P = \sqrt{\frac{2\,G\,(m_A + m_B)}{r}}$$

La última denominación de esta velocidad se debe a que ella es la velocidad necesaria para vencer el campo gravitatorio de un objeto dado. Así, para que una nave espacial escape del campo gravitatorio terrestre desde su superficie, debe adquirir una velocidad de:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2\,G\,M_T}{R_T}}$$

donde $M_T$ y $R_T$ son respectivamente la masa y el radio terrestre y se ha despreciado la masa de la nave frente a la de la Tierra. Y si se reemplazan los valores correspondientes resulta que $v_{esc} = 11.2\ km/s$. Es de notar que si la nave espacial parte de una altura dada encima de la superficie esa velocidad será menor (por ejemplo, para una altura de $5000\ km$ resulta $v_{esc} = 8.4\ km/s$)

**Tercera Ley**

Respecto a la relación que existe entre el valor del semieje ($a$) de una órbita cerrada y el período ($T$) que tarda un cuerpo en recorrerla, la ley de gravitación universal permite deducir la siguiente expresión:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\,\pi^2}{G\left(m_A + m_B\right)}$$

y aplicándola a un planeta y al Sol resulta:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\,\pi^2}{G\left(M_O + m\right)}$$

o sea que el cociente del término de la izquierda no es exactamente una constante como lo establece la tercera ley de Kepler, sino que depende de la masa del planeta en consideración. No obstante, dado que, en general, la masa de los planetas es mucho menor que la del Sol ($M_O + m \approx M_O$), la validez de dicha ley se mantiene en forma aproximada. En realidad el cociente que se mantiene constante es:

$$\frac{T^2\,(M_O + m)}{a^3} = \frac{4\,\pi^2}{G}$$

De esta forma, si se consideran dos pares de cuerpos, $C_A$ orbitando alrededor de $C_B$ y $C_C$ orbitando alrededor de $C_D$, y si sus respectivos parámetros son:

- distancias medias $a_{AB}$ y $a_{CD}$
- períodos sidéreos $T_{AB}$ y $T_{CD}$
- masas $m_A$, $m_B$, $m_C$ y $m_D$,

se obtiene entonces la siguiente relación:

$$\frac{T_{AB}^2\,(m_A + m_B)}{a_{AB}^3} = \frac{T_{CD}^2\,(m_C + m_D)}{a_{CD}^3}$$

Si ahora se considera que uno de esos pares de cuerpos ($C_C$ y $C_D$) son la Tierra y el Sol ($a_{CD} = 1\ UA$, $T_{CD} = 1$ *año* y $(m_C + m_D) \approx 1\ M_O$) resulta que:

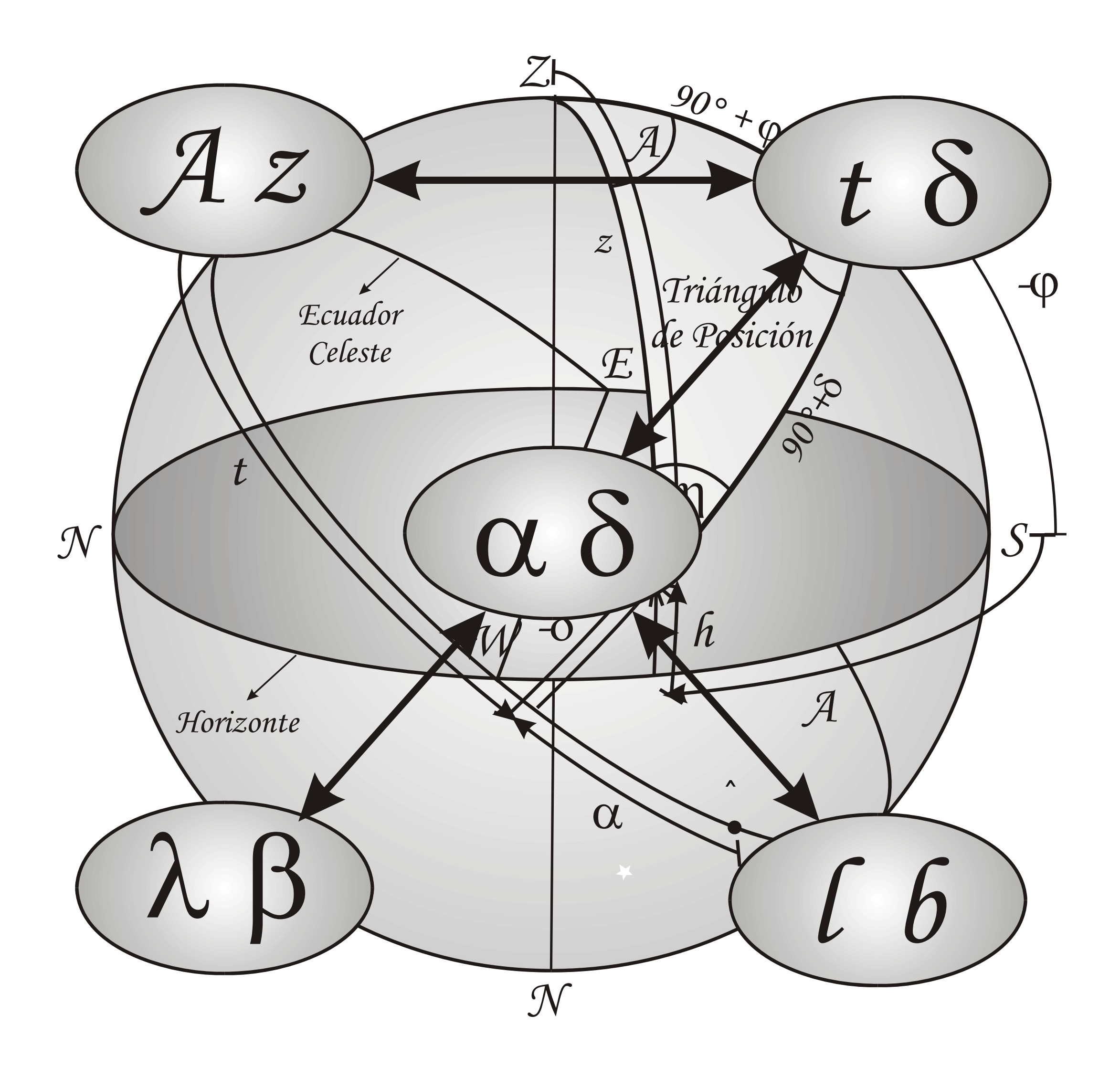
$$\frac{T^2\,(m_A + m_B)}{a^3} = 1$$

$$T^2\,(m_A + m_B) = a^3$$

donde se debe recalcar que para que esta expresión tenga validez, el período sidéreo $T$ debe estar expresado en *años*, la distancia media $a$ en *UAs* y las masas en *masas solares*.

**CAPÍTULO V**

# Sistemas de Coordenadas Celestes




La esfera celeste y distintos sistemas de coordenadas

## 1. Sistemas de Coordenadas Celestes

Las posiciones de los astros sobre la esfera celeste se determinan por medio de diferentes sistemas de coordenadas esféricos. Como se expuso en la sec. 5.3 del capítulo II, en cada uno de ellos la posición de un punto de la esfera queda determinada por el valor que toman un par de coordenadas, una de ellas se mide sobre el plano fundamental que define al sistema mientras que la otra indica la separación que existe entre dicho plano y el punto en consideración. A continuación se describen entonces los diferentes sistemas de coordenadas que surgen dependiendo que cual sea el plano adoptado como fundamental y/o el origen de coordenadas adoptados.

### 1.1. Sistema de Coordenadas Horizontales (ver Figs. V-1 y V-2)

**Plano Fundamental del Sistema:** Horizonte
**Círculos Secundarios:** Círculos Verticales
**Círculos Paralelos:** Almicantaradas
**Polos del Sistema:** Zenit y Nadir
**Coordenadas:**

- Acimut ($A$): Se mide sobre el plano del horizonte desde el punto cardinal sur ($S$) hacia el oeste ($W$) hasta el círculo vertical que pasa por el astro $S$ ($0° \leq A < 360°$).
- Altura ($h$): Se mide sobre el círculo vertical que pasa por el astro, desde el horizonte hasta el astro, siendo positiva si el astro se encuentra por encima del horizonte y negativa si se halla por debajo ($-90° \leq h \leq +90°$).
- Distancia cenital ($z$): Esta coordenada se suele utilizar en reemplazo de la altura y se la define como el complemento de ella, o sea que: $z = 90° - h$ ($0° \leq z \leq +180°$).

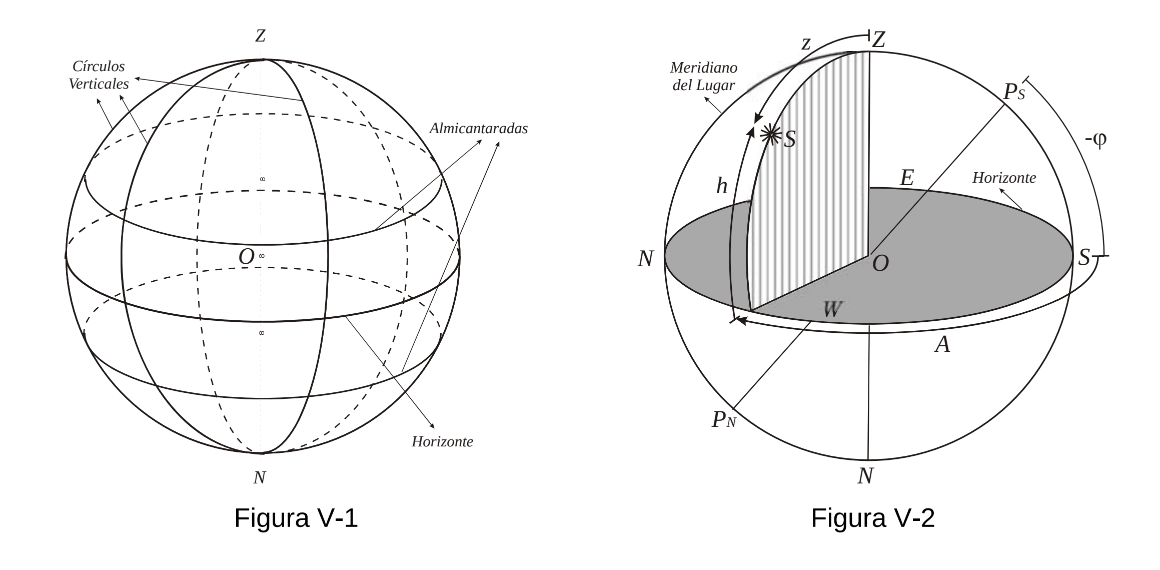



Figura V-1 Figura V-2

**1.2. Sistema de Coordenadas Ecuatoriales Locales** (ver Figs. V-3 y V-4)

**Plano fundamental del sistema:** Ecuador Celeste

**Círculos Secundarios:** Círculos Meridianos o Círculos Horarios

**Círculos Paralelos:** Paralelos Celestes

**Polos del sistema:** Polo Norte Celeste y Polo Sur Celeste

**Coordenadas:**

- Angulo Horario ($t$): se mide sobre el ecuador celeste desde su punto de intersección con el meridiano superior hacia el oeste (*W*) (sentido retrógrado) hasta el círculo horario que pasa por el astro *S* ($0^h \leq t < 24^h$).
- Declinación ($\delta$): se mide sobre el círculo horario que pasa por el astro desde el ecuador celeste hasta el astro *S*, siendo positiva si el astro se encuentra en el hemisferio norte celeste y negativa si se halla en el hemisferio sur celeste ($-90° \leq \delta \leq +90°$).

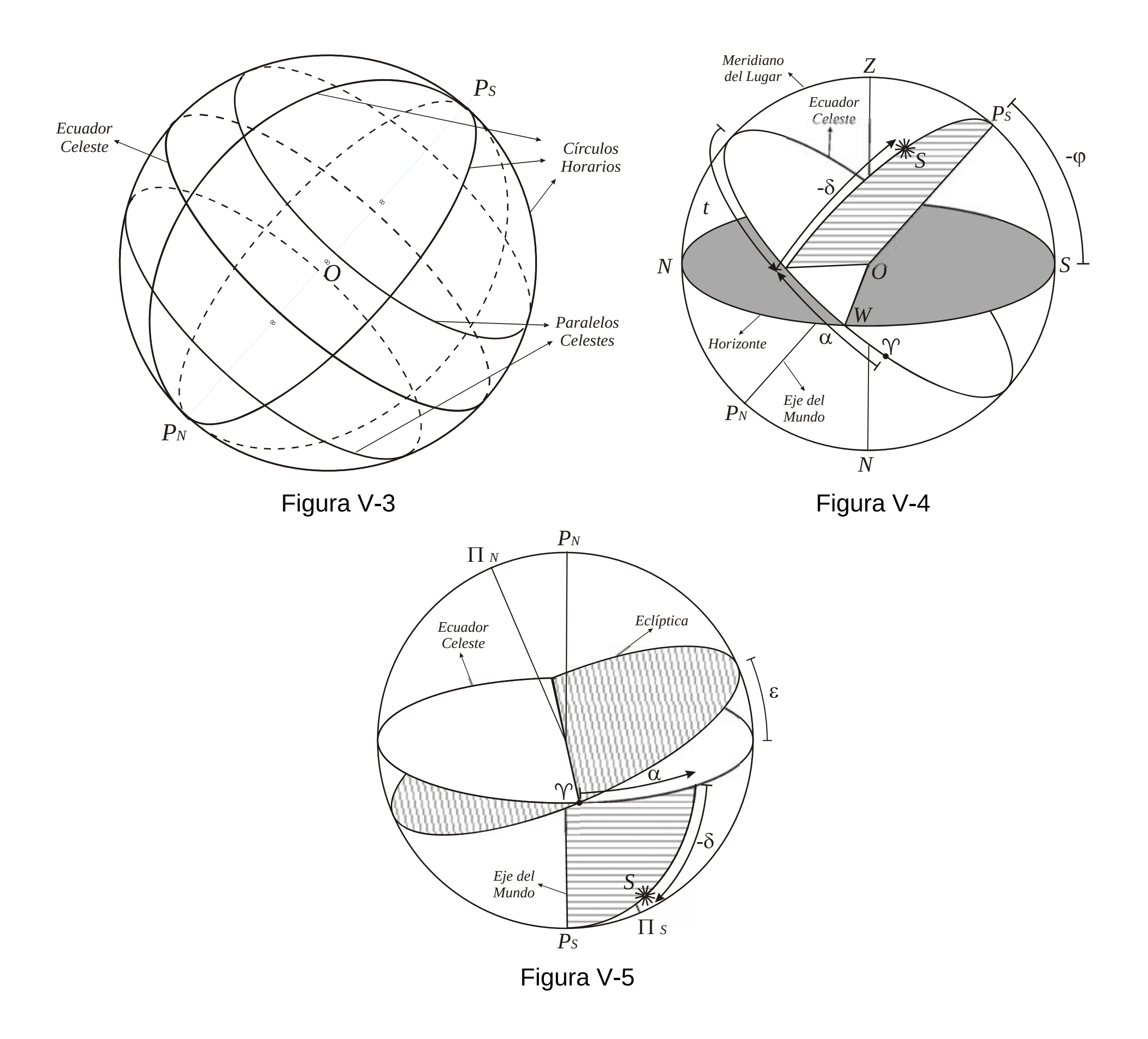



Figura V-3

Figura V-4

Figura V-5

**1.3. Sistema de Coordenadas Ecuatoriales Celestes** (ver Figs. V-3, V-4 y V-5)

**Plano fundamental del sistema:** Ecuador Celeste

**Círculos Secundarios:** Círculos Meridianos o Círculos Horarios

**Círculos Paralelos:** Paralelos Celestes

**Polos del sistema:** Polo Norte Celeste y Polo Sur Celeste

**Coordenadas:**

- Ascensión Recta ($\alpha$): Se mide sobre el ecuador celeste desde el equinoccio vernal (♈) hacia el este ($E$) (sentido directo) hasta el círculo horario que pasa por el astro $S$ ($0^h \leq \alpha < 24^h$).
- Declinación ($\delta$): Se mide sobre el círculo horario que pasa por el astro, desde el ecuador celeste hasta el astro, siendo positiva si el

astro se encuentra en el hemisferio norte celeste y negativa si se halla en el hemisferio sur celeste ($-90° \leq \delta \leq +90°$).

### 1.4. Sistema de Coordenadas Ecliptical (ver Figs. V-6 y V-7)

**Plano fundamental del sistema:** Eclíptica

**Círculos Secundarios:** Círculos de Latitud Celeste

**Círculos Paralelos:** Paralelos de la Latitud Celeste

**Polos del sistema:** Polo Norte Eclíptico y Polo Sur Eclíptico

**Coordenadas:**

- Longitud Ecliptical ($\lambda$): Se mide sobre la eclíptica desde el equinoccio vernal (♈) hacia el este ($E$) (sentido directo) hasta el círculo máximo que pasa por el astro $S$ y por los polos del sistema ($0° \leq \lambda < 360°$).
- Latitud Ecliptical ($\beta$): Se mide sobre el círculo máximo que pasa por el astro $S$ desde la eclíptica hasta el astro, siendo positiva si el astro se encuentra en el hemisferio correspondiente al polo eclíptico norte y negativa si se halla en el hemisferio correspondiente al polo eclíptico sur ($-90° \leq \beta \leq +90°$).

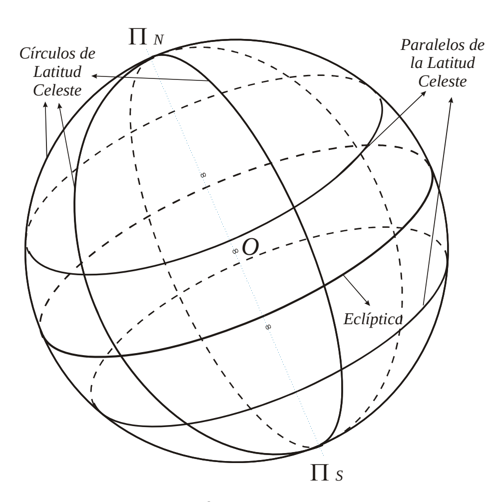


Figura V-6

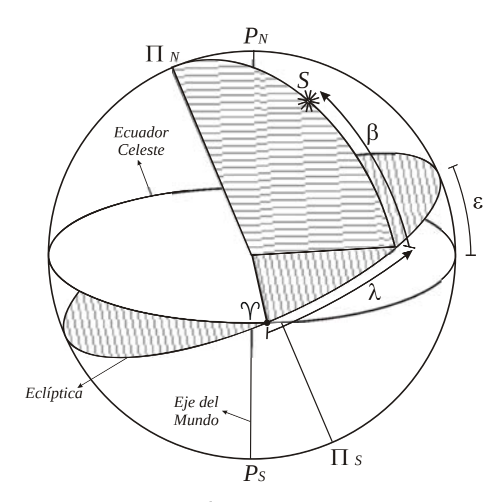


Figura V-7

**1.5. Sistema de Coordenadas Galáctico** (ver Fig. V-8)

**Plano fundamental del sistema:** Plano galáctico

**Polos del sistema:** Polo Norte Galáctico y Polo Sur Galáctico

**Coordenadas:**

- Longitud Galáctica ($l$): se mide sobre el plano galáctico desde la visual al Centro Galáctico ($CG$) y en sentido directo hasta el círculo máximo que pasa por el astro $S$ y por los polos del sistema ($0° \leq l < 360°$).
- Latitud Galáctica ($b$): Se mide sobre el círculo máximo que pasa por el astro desde el círculo galáctico hasta el astro $S$, siendo positiva si el astro se encuentra en el hemisferio correspondiente al polo galáctico norte ($GN$) y negativa si se halla en el hemisferio correspondiente al polo galáctico sur ($GS$) ($-90° \leq b \leq +90°$).

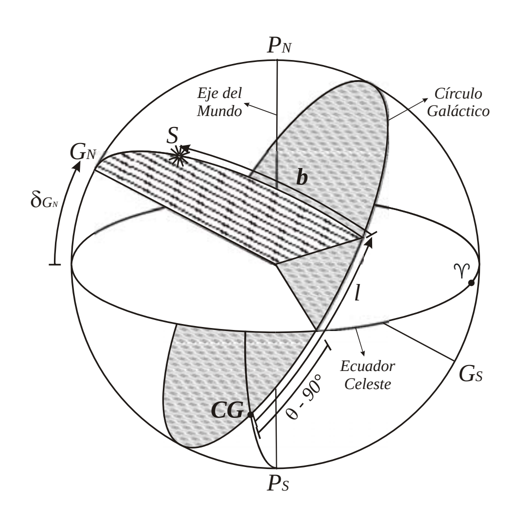



Figura V-8

## 2. Transformación de Sistemas de Coordenadas

Las coordenadas de un astro en un sistema dado (por ejemplo, el horizontal) se pueden transformar en las coordenadas correspondientes a otro sistema (por ejemplo, el ecuatorial local) utilizando las expresiones de la trigonometría esférica (Teorema del Seno, Teorema del Coseno y Fórmula de los Cinco Elementos) deducidas en el capítulo II.

### 2.1. Sistema Horizontal ⇔ Sistema Ecuatorial Local

El planteo y resolución de este tipo de problema se realiza siguiendo los siguientes pasos:

a) Identificación de cuáles son los datos y cuáles las incógnitas. Se pueden presentar entonces dos casos:

- Pasaje del sistema horizontal al sistema ecuatorial local

| | |
|---|---|
| Datos | Latitud del lugar ($\varphi$)<br>Acimut del astro ($A$)<br>Altura o Distancia Cenital del astro ($h$ o $z$) |
| Incógnitas | Angulo horario del astro ($t$)<br>Declinación del astro ($\delta$) |

Pasaje del sistema ecuatorial local al sistema horizontal

| | |
|---|---|
| Datos | Latitud del lugar ($\varphi$)<br>Angulo horario del astro ($t$)<br>Declinación del astro ($\delta$) |
| Incógnitas | Acimut del astro ($A$)<br>Altura o Distancia Cenital del astro ($h$ o $z$) |

Es de notar que la latitud del lugar ($\varphi$) siempre se considera como un dato necesario para resolver este tipo de problemas.

b) El siguiente paso es dibujar la esfera celeste de acuerdo con los datos dados (cualquiera sea el caso de que se trate) indicando sobre ella los nombres de las variables (tanto datos como incógnitas) donde corresponda. Aquí también se presentan dos situaciones dependiendo de cuál sea el signo de la latitud, ya que ella indicará cuál será el polo celeste que se encontrará elevado.

- Si $\varphi > 0$ el polo elevado será el Polo Celeste Norte ($PN$), resultando el dibujo de la Fig. V-9a.
- Si $\varphi < 0$ el polo elevado será el Polo Celeste Sur ($PS$), resultando el dibujo de la Fig. V-10a.

Cabe destacar que las variables a las que les correspondan valores negativos (ya sea porque se los conoce numéricamente o porque así lo indica el dibujo) se deben indicar con un “signo menos” delante de ellas.

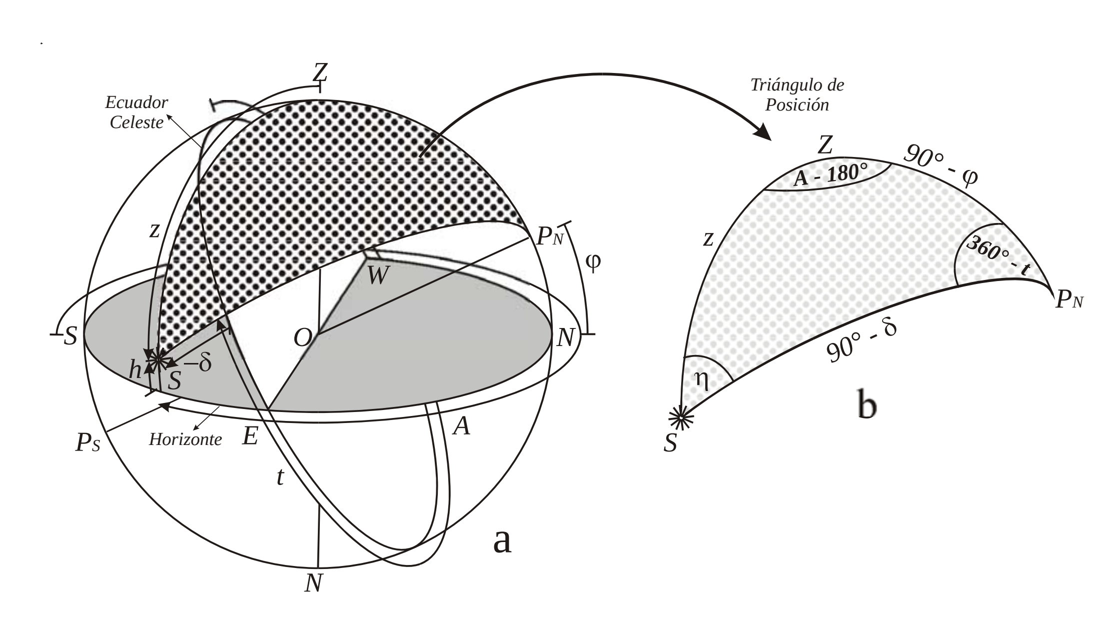



Figura V-9

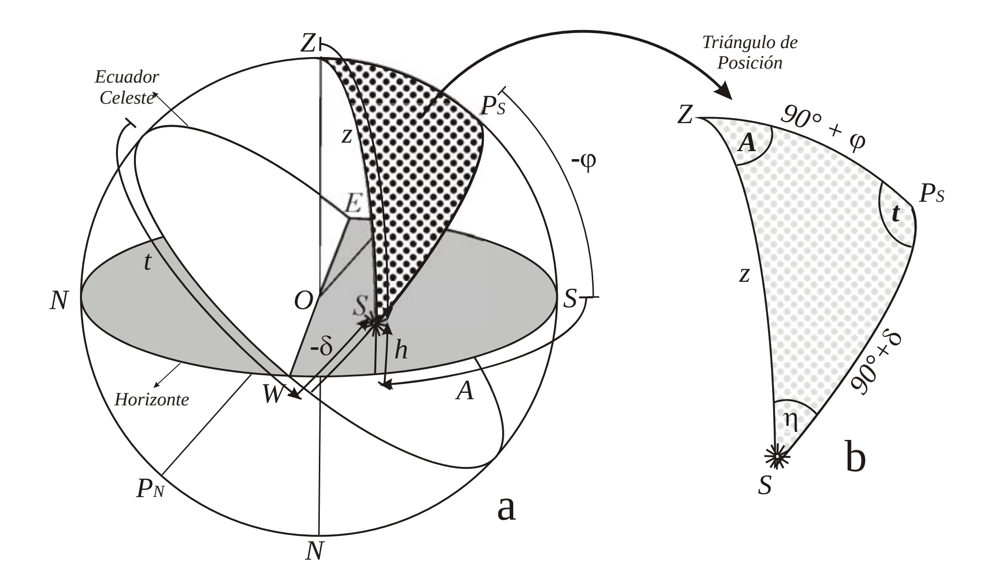



Figura V-10

c) El paso que sigue es identificar cuál es el **Triángulo de Posición**, que se caracteriza por tener como vértices a los siguientes tres puntos:

- el cenit (*Z*)
- el polo celeste elevado (*PN* o *PS*), y
- el astro (*S*).

Luego es conveniente dibujar este triángulo aparte y expresar sus elementos, ángulos y arcos (recordar la sección 3.2 del capítulo II), en función de todas las variables en juego, tanto datos como incógnitas. De esta manera resulta la Fig. V-9b o la Fig. V-10b, según se trate de $\varphi > 0$ o $\varphi < 0$ respectivamente. El ángulo en el astro, indicado con la letra $\eta$ en los triángulos de posición se denomina **Angulo Paraláctico**.

d) El paso siguiente es aplicar las expresiones de la trigonometría esférica (Teorema del seno, del coseno y Fórmula de los cinco elementos). No obstante la forma de hacerlo dependerá de cuáles sean los datos y cuáles las incógnitas, resultando así los dos casos planteados en el primer paso y las expresiones resultantes en cada uno de ellos serán:

Para el pasaje del sistema horizontal al sistema ecuatorial local:

| Sistema de ecuaciones 1 | | |
|---|---|---|
| $sen\delta =$ | $sen\ \varphi\ \cos z - \cos\varphi\ sen\ z\ \cos A$ | T. del Coseno |
| $\cos\delta\ \cos t =$ | $\cos\varphi \cos z + sen\ \varphi\ sen\ z \cos A$ | F. de los 5 elem. |
| $\cos\delta\ sen\ t =$ | $sen\ z\ \ sen\ A$ | T. del Seno |

| Sistema de ecuaciones 2 | | |
|---|---|---|
| $sen\delta =$ | $sen\ \varphi\ \cos z - \cos\varphi\ sen\ z\ \cos A$ | T. del Coseno |
| $\cos z =$ | $sen\ \varphi\ sen\ \delta + \cos\varphi\ \cos\delta\ \cos t$ | T. del Coseno |
| $sen\ \delta\ sen\ t =$ | $sen\ z\ \ sen\ A$ | T. del Seno |

Para el pasaje del sistema ecuatorial local al sistema horizontal:

| Sistema de ecuaciones 1 | | |
|---|---|---|
| $\cos z =$ | $sen\ \varphi\ sen\ \delta + \cos\varphi\ \cos\delta\ \cos t$ | T. del Coseno |
| $sen\ z\ \cos A =$ | $-\cos\varphi\ sen\ \delta + sen\ \varphi\ \cos\delta \cos t$ | F. de los 5 elem. |
| $sen\ z\ \ sen\ A =$ | $\cos\delta\ sen\ t$ | T. del Seno |

| Sistema de ecuaciones 2 | | |
|---|---|---|
| $\cos z =$ | $sen\ \varphi\ sen\ \delta + \cos\varphi\ \cos\delta\ \cos t$ | T. del Coseno |
| $sen\delta =$ | $sen\ \varphi\ \cos z - \cos\varphi\ sen\ z\ \cos A$ | T. del Coseno |
| $sen\ z\ \ sen\ A =$ | $\cos\delta\ sen\ t$ | T. del Seno |

Se nota entonces que:

- Cualquiera que sea el triángulo sobre el que se aplican las expresiones de la trigonometría esférica (Fig. V-9b o Fig. V-10b), los sistemas de ecuaciones a los que se llega son los mencionados. Esto resulta así, siempre y cuando se respete la regla de colocar en los gráficos un “signo menos” delante de las variables que sean negativas.

- Si bien el ángulo horario (*t*) se mide en horas, minutos y segundos (de tiempo), a los fines de utilizar las expresiones anteriores, se lo debe colocar (si se trata de un dato), o surge de ellas (si se trata de una incógnita) expresado en grados, minutos y segundos (de arco). Entonces es necesario hacer la transformación de unidades adecuada.

En cualquiera de los pasajes se pueden utilizar dos sistemas de ecuaciones, “sistema de ecuaciones 1” o “sistema de ecuaciones 2”. No existe, en principio, preferencia por uno o por otro. Sin embargo se aprecia que:

- En el sistema de ecuaciones 1 los datos se encuentran siempre en el miembro derecho de las expresiones y las incógnitas en el izquierdo. Esto permite resolver el problema de una forma más directa.
- En el sistema de ecuaciones 2, si bien no existe la separación entre datos e incógnitas del sistema 1, no se necesita recurrir a la Fórmula de los cinco elementos para su planteo.

Puede llamar la atención que, a pesar de que siempre se tengan solo dos incógnitas, siempre hay que recurrir a tres expresiones para resolver el problema (ninguna de las tres está de más). Esta aparente incongruencia se debe a que las incógnitas que se están manejando son ángulos y las expresiones anteriores no permiten determinar sus valores directamente, sino los valores de sus funciones trigonométricas. Dado que no existe una relación biunívoca de esas funciones con sus argumentos, entonces se debe recurrir a más de una de ellas (a dos en general) para hallar el valor correcto de las incógnitas, o sea para ubicar los ángulos buscados en el cuadrante correcto.

Con la explicación anterior se puede pensar que se necesitarían cuatro expresiones para hallar dos incógnitas (dos funciones trigonométricas para cada ángulo). Esto es en principio cierto, no obstante es de notar:

- Una de las incógnitas solo se puede encontrar en dos cuadrantes (ya sea el caso de la distancia cenital o de la declinación),
- La otra incógnita puede hallarse en cualquiera de los cuatro cuadrantes (ya sea el caso del ácimut o del ángulo horario)

De esta forma, para la primera de las incógnitas solo se necesita una expresión mientras que para la segunda se utilizan las otras dos, haciendo el total de las tres expresiones ya presentadas.

e) El paso final es la resolución del uno de los sistemas de ecuaciones a partir de los datos dados.

A modo de ejemplo, se hace entonces el planteo para el caso del pasaje del sistema horizontal al sistema ecuatorial local. Siempre se debe hallar primero el valor del ángulo incógnita que se puede hallar en dos cuadrantes (en este caso $\delta$), y luego el del que puede estar en cualquiera de ellos (en este caso $t$).

Determinación de $\delta$: En el sistema 1 o el 2 la ecuación que permite determinar $\delta$ es:

$$sen\delta = sen\ \varphi\ \cos z - \cos\varphi\ sen\ z\ \cos A$$

Ya que del lado derecho de ella todos los valores son datos, y del lado izquierdo se encuentra la función trigonométrica *seno*, la que nos permite discriminar perfectamente (de acuerdo al signo resultante) si la declinación se halla en el cuadrante I o en el IV ($-90° < \delta < 90°$).

Determinación de $t$: Si se utiliza el sistema de ecuaciones 2 (utilizando el sistema de ecuaciones 1 el procedimiento es similar), se despeja entonces de la segunda expresión el producto $\cos\delta\ \cos t$, resultando:

$$\cos\delta\cos t = \frac{\cos z - \operatorname{sen}\delta}{\cos\varphi} \quad (1)$$

mientras que de la tercer expresión se tiene que:

$$\cos\delta\ \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} z\ \ \operatorname{sen} A \quad (2)$$

A continuación se hace el cociente (2) / (1), resultando:

$$tg\ t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \frac{\operatorname{sen} z\ \operatorname{sen} A \cos\varphi}{\cos z - \operatorname{sen}\delta}$$

Es necesario remarcar que la última expresión da el valor de *tg t*, no el de *t*. Y para obtener este valor <u>no basta</u> con utilizar la función **INV** **tan** ó **tan**$^{-1}$ (*arcotg* en la calculadora), ya que normalmente el resultado que se obtiene se encuentra en los cuadrantes I o IV y *t* se puede hallaren cualquiera de los cuatro cuadrantes.

Para poder identificar sin ambigüedad en que cuadrante se encuentra *t*, se puede proceder de dos maneras:

Utilizar el dibujo de la esfera celeste realizado de acuerdo con los valores de los datos, en el que puede resultar obvio cuál es el cuadrante en que se halla *t*. No obstante, dado que el dibujo es una aproximación, este puede conducir a un error.

La forma más segura es utilizar las expresiones (1) y (2) como se indica a continuación. Como $\delta$ se puede hallar en los cuadrantes I o IV, siempre será $\cos\ \delta\ \geq\ 0$, por lo que los resultados de los miembros derechos de las expresiones (1) y (2) tendrán como signo aquel que le corresponde al *cos t* o al *sen t* respectivamente. De esta forma se puede identificar el cuadrante en el que se encuentra el ángulo horario (*t*).

## 2.2. Sistema Ecuatorial Local ⇔ Sistema Ecuatorial Celeste

Este tipo de transformaciones es bastante más sencilla que la anterior, debido a que los dos sistemas poseen el mismo plano fundamental (el ecuador celeste). Como consecuencia de ello comparten una de las coordenadas (la declinación $\delta$), de manera que el pasaje de un sistema a otro consiste solamente en:

a) Hallar el valor de la ascensión recta ($\alpha$) dado el valor del ángulo horario ($t$) para el caso de pasar del sistema ecuatorial local al sistema ecuatorial celeste.

b) Hallar el valor del ángulo horario ($t$) dado el valor de la ascensión recta ($\alpha$) para el caso de pasar del sistema ecuatorial celeste al sistema ecuatorial local. Para resolver el problema se necesita la siguiente expresión que vincula ambas variables (ver Fig. V-4):

$$t_{\gamma} = \alpha + t$$

Donde $t_\gamma$ es el valor del ángulo horario del Punto Vernal (♈) en el momento y en el lugar en que se realiza la observación. Este valor se conoce también con el nombre de **Tiempo Sidéreo Local** ($TS$) y siempre debe ser un dato en este tipo de transformación.

Es de notar que el resultado que puede arrojar la expresión anterior, tanto para $t$ como para $\alpha$ puede ser negativo (inferior a $0\ h$) o superior a $24\ h$. Pero como las variables con las que se trabaja pueden variar solo de $0\ h$ a $24\ h$, se debe hacer una reducción al dicho intervalo como paso adicional si fuera necesario.

## 2.3. Sistema Ecuatorial Celeste ⇔ Sistema Ecliptical

El planteo y resolución de este tipo de problema es totalmente similar a las transformaciones entre el sistema horizontal y el sistema ecuatorial local ya descriptas en la sección 2.1. Por lo que los pasos a seguir son enteramente similares a los ya expresados allí, con la salvedad obvia de que se trata de otras variables. Dichos pasos son entonces los siguientes:

a) Identificación de cuáles son los datos y cuáles las incógnitas, teniendo los siguientes dos casos:

Pasaje del sistema ecuatorial celeste al sistema ecliptical

| | |
|---|---|
| Datos | Ascensión recta del astro ($\alpha$)<br>Declinación del astro ($\delta$) |
| Incógnitas | Longitud ecliptical del astro ($\lambda$)<br>Latitud ecliptical del astro ($\beta$) |

Pasaje del sistema ecliptical al sistema ecuatorial celeste

| | |
|---|---|
| Datos | Longitud ecliptical del astro ($\lambda$)<br>Latitud ecliptical del astro ($\beta$) |
| Incógnitas | Ascensión recta del astro ($\alpha$)<br>Declinación del astro ($\delta$) |

Además, la inclinación entre el ecuador celeste y la eclíptica ($\varepsilon = 23° 27'$) siempre es un dato necesario para resolver este tipo de problemas.

b) A continuación, se debe dibujar la esfera celeste de acuerdo con los datos dados (cualquiera sea el caso de que se trate) indicando sobre ella los nombres de las variables (tanto datos como incógnitas) donde corresponda.

Resulta de esta forma la Fig. V-11a (u otra similar dependiendo del valor de los datos).

c) Como siguiente paso se identifica el triángulo esférico que tiene como vértices a los siguientes tres puntos:

- uno de los polos celestes (*PN* o *PS*)
- uno de los polos eclípticos ($\Pi_N$ o $\Pi_S$), y
- el astro (*S*).

Luego se dibuja ese triángulo aparte y se expresan sus elementos, ángulos y arcos (recordar la sección 4 del capítulo I), en función de todas las variables en juego, tanto datos como incógnitas. De esta manera resulta la Fig. V-11b.

d) Luego se aplican las expresiones de la trigonometría esférica (Teorema del seno, del coseno y Fórmula de los cinco elementos), obteniéndose las siguientes relaciones:

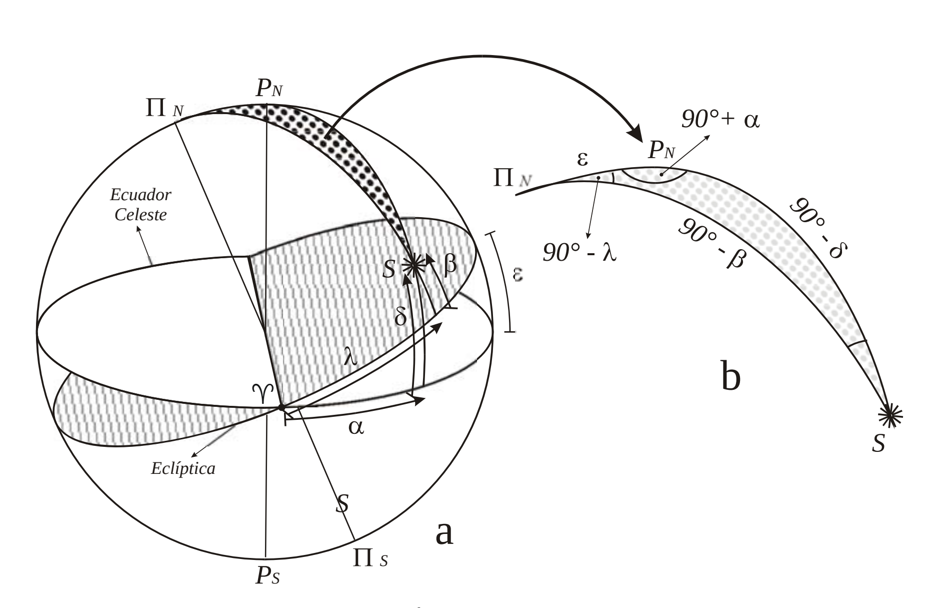



Figura V-11

Para el pasaje del sistema ecuatorial celeste al sistema ecliptical:

| Sistema de ecuaciones 1 | | |
|---|---|---|
| $sen\ \beta =$ | $sen\ \delta\ cos\ \varepsilon - cos\ \delta\ sen\ \varepsilon\ sen\ \alpha$ | T. del Coseno |
| $cos\ \beta\ sen\ \lambda =$ | $sen\ \delta\ sen\ \varepsilon + cos\ \delta\ cos\ \varepsilon\ sen\ \alpha$ | F. de los 5 elem. |
| $cos\ \beta\ cos\ \lambda =$ | $cos\ \delta\ cos\ \alpha$ | T. del Seno |

| Sistema de ecuaciones 2 | | |
|---|---|---|
| $sen\ \beta =$ | $sen\ \delta\ cos\ \varepsilon - cos\ \delta\ sen\ \varepsilon\ sen\ \alpha$ | T. del Coseno |
| $sen\ \delta =$ | $sen\ \beta\ cos\ \varepsilon + cos\ \beta\ sen\ \varepsilon\ sen\ \lambda$ | T. del Coseno |
| $cos\ \beta\ cos\ \lambda =$ | $cos\ \delta\ cos\ \alpha$ | T. del Seno |

Para el pasaje del sistema ecliptical al sistema ecuatorial celeste:

| Sistema de ecuaciones 1 | | |
|---|---|---|
| $sen\ \delta =$ | $sen\ \beta\ cos\ \varepsilon + cos\ \beta\ sen\ \varepsilon\ sen\ \lambda$ | T. del Coseno |
| $cos\ \delta\ sen\ \alpha =$ | $- sen\ \beta\ sen\ \varepsilon + cos\ \beta\ cos\ \varepsilon\ sen\ \lambda$ | F. de los 5 elem. |
| $cos\ \delta\ cos\ \alpha =$ | $cos\ \beta\ cos\ \lambda$ | T. del Seno |

| Sistema de ecuaciones 2 | | |
|---|---|---|
| $sen\ \delta =$ | $sen\ \beta\ cos\ \varepsilon + cos\ \beta\ sen\ \varepsilon\ sen\ \lambda$ | T. del Coseno |
| $sen\ \beta =$ | $sen\ \delta\ cos\ \varepsilon - cos\ \delta\ sen\ \varepsilon\ sen\ \alpha$ | T. del Coseno |
| $cos\ \delta\ cos\ \alpha =$ | $cos\ \beta\ cos\ \lambda$ | T. del Seno |

e) El paso final es, como siempre, la resolución del uno de los sistemas de ecuaciones a partir de los datos dados y de la misma forma y con las mismas consideraciones a la ejemplificada en el quinto paso de la sección 2.1.

## 2.4. Sistema Ecuatorial Celeste ⇔ Sistema Galáctico

Nuevamente, el planteo y resolución de este tipo de problema es totalmente similar a las transformaciones entre el sistema horizontal y el sistema ecuatorial local o entre el sistema ecuatorial celeste y el sistema ecliptical, ya descriptas en las secciones 2.1. y 2.3. Siguiendo entonces pasos similares a dados para esos casos resulta la Fig. V-12 donde se ha aislado el triángulo esférico con vértices en:

- uno de los polos celestes (*PN* o *PS*)
- uno de los polos galácticos (*GN* o *GS*), y
- el astro (*S*).

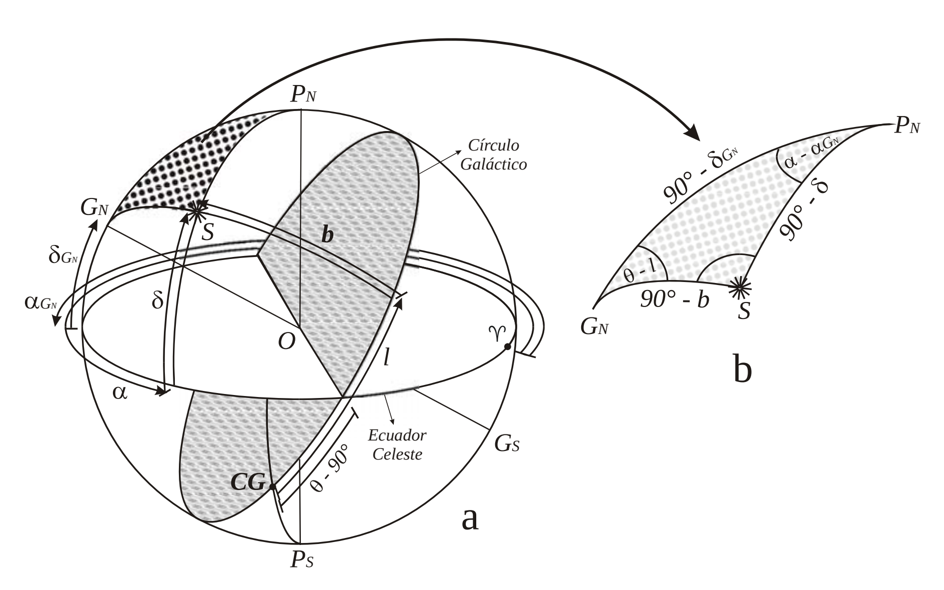



Figura V-12

Y las expresiones que se obtienen son:

Para el pasaje del sistema ecuatorial celeste al sistema galáctico:

| Sistema de ecuaciones 1 | | |
|---|---|---|
| $sen\ b =$ | $sen\ \delta\ sen\ \delta_{GN} + cos\ \delta\ cos\ \delta_{GN}\ cos\ (\alpha\text{-}\alpha_{GN})$ | T. del Coseno |
| $cos\ b\ cos\ (\theta - l) =$ | $sen\ \delta\ cos\ \delta_{GN} - cos\ \delta\ cos\ \delta_{GN}\ cos\ (\alpha\text{-}\alpha_{GN})$ | F. de los 5 elem. |
| $cos\ b\ sen\ (\theta - l) =$ | $cos\ \delta\ sen\ (\alpha\text{-}\alpha_{GN})$ | T. del Seno |

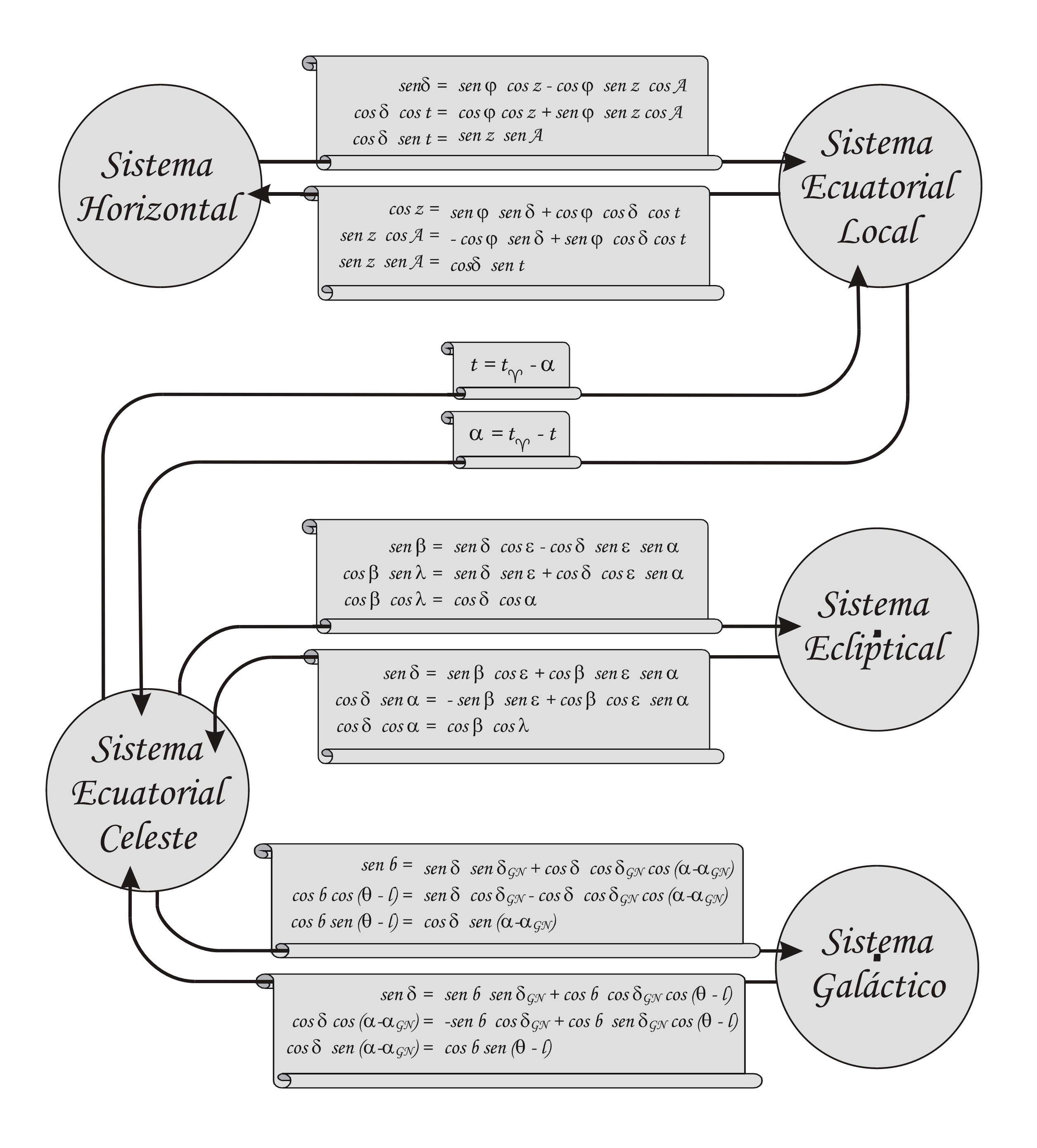
| Sistema de ecuaciones 2 | | |
|---|---|---|
| $sen\ b =$ | $sen\ \delta\ sen\ \delta_{GN} + cos\ \delta\ cos\ \delta_{GN}\ cos\ (\alpha\text{-}\alpha_{GN})$ | T. del Coseno |
| $sen\ \delta =$ | $sen\ b\ sen\ \delta_{GN} + cos\ b\ cos\ \delta_{GN}\ cos\ (\theta - l)$ | T. del Coseno |
| $cos\ b\ sen\ (\theta - l) =$ | $cos\ \delta\ sen\ (\alpha\text{-}\alpha_{GN})$ | T. del Seno |

Para el pasaje del sistema galáctico al sistema ecuatorial celeste:

| Sistema de ecuaciones 1 | | |
|---|---|---|
| $sen\ \delta =$ | $sen\ b\ sen\ \delta_{GN} + cos\ b\ cos\ \delta_{GN}\ cos\ (\theta - l)$ | T. del Coseno |
| $cos\ \delta\ cos\ (\alpha\text{-}\alpha_{GN}) =$ | $-sen\ b\ cos\ \delta_{GN} + cos\ b\ sen\ \delta_{GN}\ cos\ (\theta - l)$ | F. de los 5 elem. |
| $cos\ \delta\ sen\ (\alpha\text{-}\alpha_{GN}) =$ | $cos\ b\ sen\ (\theta - l)$ | T. del Seno |

| Sistema de ecuaciones 2 | | |
|---|---|---|
| $sen\ \delta =$ | $sen\ b\ sen\ \delta_{GN} + cos\ b\ cos\ \delta_{GN}\ cos\ (\theta - l)$ | T. del Coseno |
| $sen\ b =$ | $sen\ \delta\ sen\ \delta_{GN} + cos\ \delta\ cos\ \delta_{GN}\ cos\ (\alpha\text{-}\alpha_{GN})$ | T. del Coseno |
| $cos\ \delta\ sen\ (\alpha\text{-}\alpha_{GN}) =$ | $cos\ b\ sen\ (\theta - l)$ | T. del Seno |

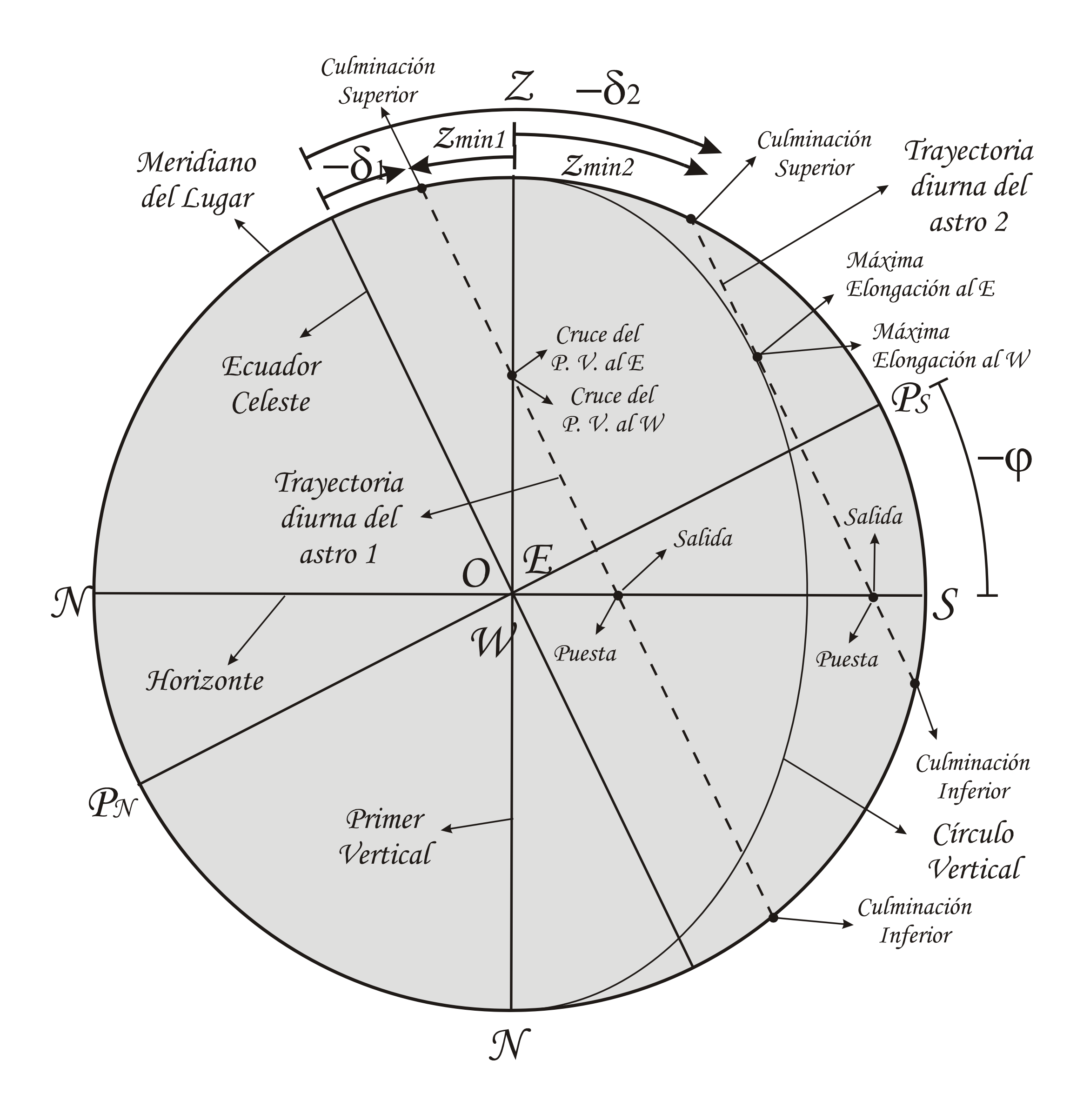
## 3. Resumen



Sistema Horizontal
Sistema Ecuatorial Local
sen δ = sen φ cos z - cos φ sen z cos A
cos δ cos t = cos φ cos z + sen φ sen z cos A
cos δ sen t = sen z sen A
cos z = sen φ sen δ + cos φ cos δ cos t
sen z cos A = - cos φ sen δ + sen φ cos δ cos t
sen z sen A = cos δ sen t
t = t♈ - α
α = t♈ - t
Sistema Ecuatorial Celeste
Sistema Ecliptical
sen β = sen δ cos ε - cos δ sen ε sen α
cos β sen λ = sen δ sen ε + cos δ cos ε sen α
cos β cos λ = cos δ cos α
sen δ = sen β cos ε + cos β sen ε sen α
cos δ sen α = - sen β sen ε + cos β cos ε sen α
cos δ cos α = cos β cos λ
Sistema Galáctico
sen b = sen δ sen δGN + cos δ cos δGN cos (α-αGN)
cos b cos (θ - l) = sen δ cos δGN - cos δ cos δGN cos (α-αGN)
cos b sen (θ - l) = cos δ sen (α-αGN)
sen δ = sen b sen δGN + cos b cos δGN cos (θ - l)
cos δ cos (α-αGN) = -sen b cos δGN + cos b sen δGN cos (θ - l)
cos δ sen (α-αGN) = cos b sen (θ - l)

## CAPÍTULO VI

# Situaciones Particulares de los Astros en la Esfera Celeste




Proyección de la esfera celeste y diversas situaciones particulares

## 1. Introducción

Existen diversas situaciones en las que los astros (a lo largo de su movimiento diurno) van atravesando diferentes elementos de la esfera celeste (meridiano del lugar, primer vertical, horizonte, etc.). Esos casos particulares toman nombres especiales y además las expresiones que vinculan las distintas coordenadas (en general las horizontales y las ecuatoriales, vistas en la sección anterior) se ven simplificadas y son de gran utilidad para la determinación de las incógnitas. Estas últimas pueden ser las coordenadas ecuatoriales celestes ($\alpha$ y $\delta$) o la latitud del lugar de obsevación ($\varphi$)

Las Figs. VI-1 y VI-2 indican esos diferentes casos particulares para dos astros (astro 1 y astro 2 respectivamente).

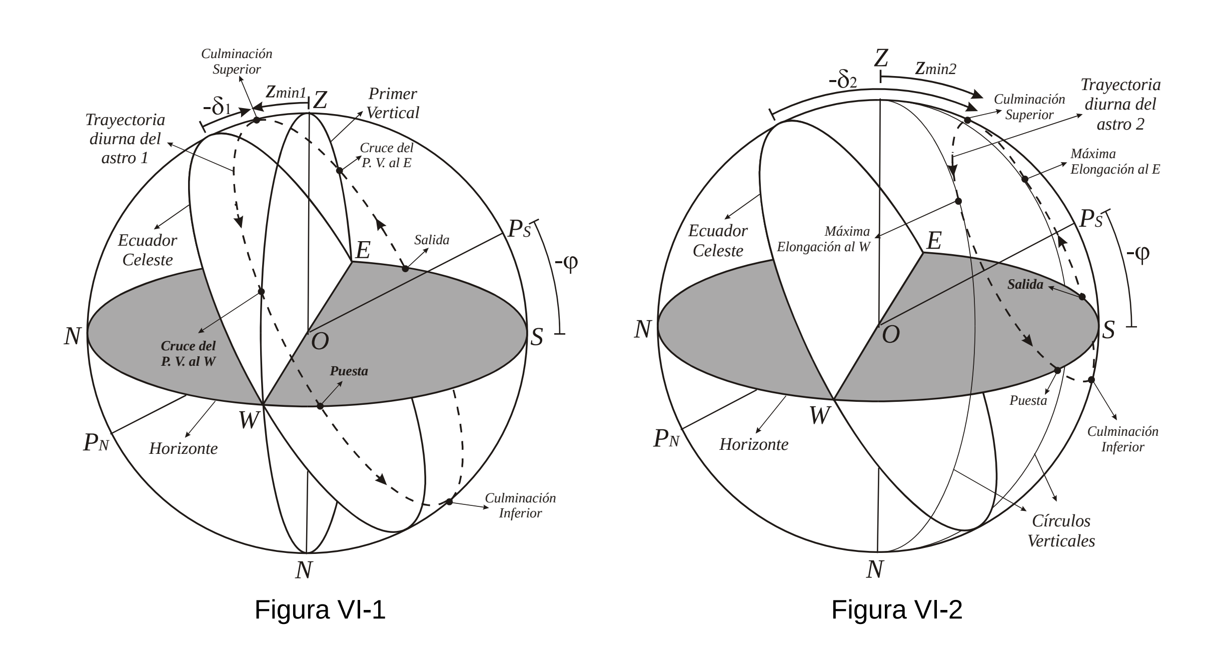



Figura VI-1 Figura VI-2

La Fig. VI-3 presenta ambas figuras anteriores en una sola, en la que se han proyectado todos los elementos de la esfera sobre el plano meridiano.

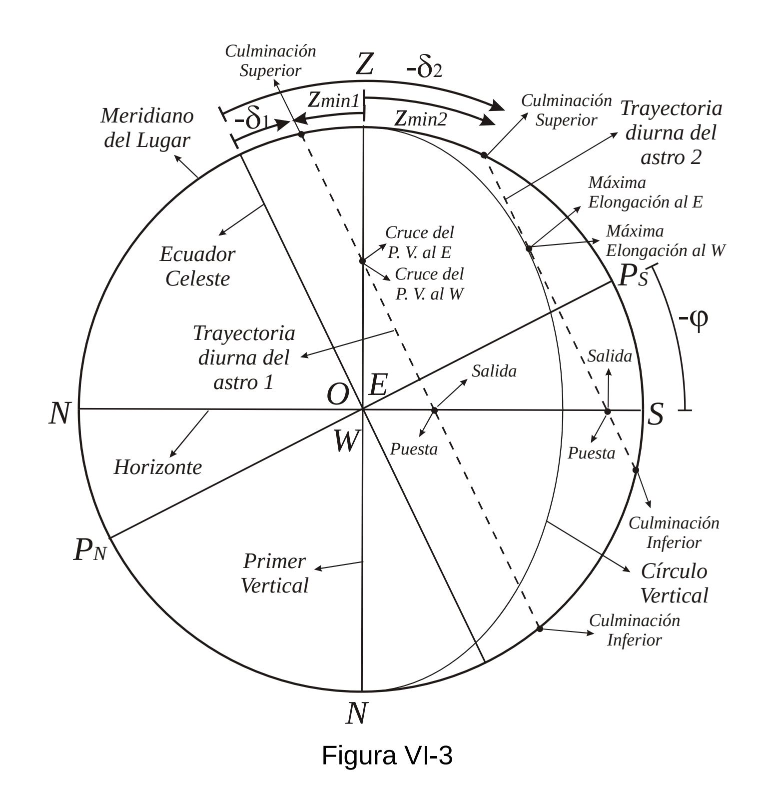



Figura VI-3

## 2. Culminación de los astros

Se denomina Culminación de un astro, al instante en que el mismo se encuentra pasando por el meridiano del lugar. Se tienen entonces dos tipos de culminaciones:

- **Culminación superior:** Es aquella en la que el valor del ángulo horario es de $0h$. En este momento, el astro alcanza su posición más alta sobre el horizonte ($h = h_{max}$) y el tiempo sidéreo es igual a la ascensión recta ($TS = \alpha$)

- **Culminación inferior:** Es aquella en la que el valor del ángulo horario es de $12h$. En este momento, el astro alcanza su posición más lejana del zenit ($z = z_{max}$)

Observando las Figs. VI-1, VI-2 y VI-3, se nota que en el caso particular de la Culminación superior, la distancia cenital ($z$), la declinación ($\delta$) y la latitud del lugar ($\varphi$) vienen relacionadas por la expresión:

$$\boxed{z = z_{min} = \pm(\varphi - \delta)}$$

siendo válido el signo positivo si el astro culmina superiormente al sur del zenit (astro 1, $z_{min} = z_{min1}$), y negativo en caso contrario (astro 2, $z_{min} = z_{min2}$). Normalmente, la distancia cenital es un parámetro determinado directamente por la observación, entonces si se conoce la latitud del lugar, se puede deducir el valor de la declinación del astro en cuestión. Y viceversa, si se conoce la declinación del astro, se puede deducir el valor de la latitud del lugar de observación.

Respecto al valor que toma el ácimut del astro, este puede ser de $A = 0°$ si la culminación se produce al sur del cenit o $A = 180°$ si se produce hacia el norte.

### 3. Salida y puesta de un astro

La salida y puesta de un astro se produce cuando el mismo intersecta al círculo máximo del horizonte (ver Figs. VI-1, VI-2 y VI-3).

Como se vio anteriormente (Sec. 2.1 del capítulo V), la expresión que vincula la distancia cenital ($z$), la declinación ($\delta$), la latitud del lugar ($\varphi$) y el ángulo horario ($t$) es:

$$\cos z = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

En los instantes de salida y puesta del astro se verifica que $z = 90°$ y $t = t_{SP}$, con lo que la fórmula anterior queda de la siguiente forma:

$$0 = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t_{SP} \Rightarrow \cos t_{SP} = -\frac{\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \delta}{\cos \varphi \cos \delta}$$

o en forma más compacta:

$$\boxed{\cos t_{SP} = -tg\ \varphi\ tg\ \delta}$$

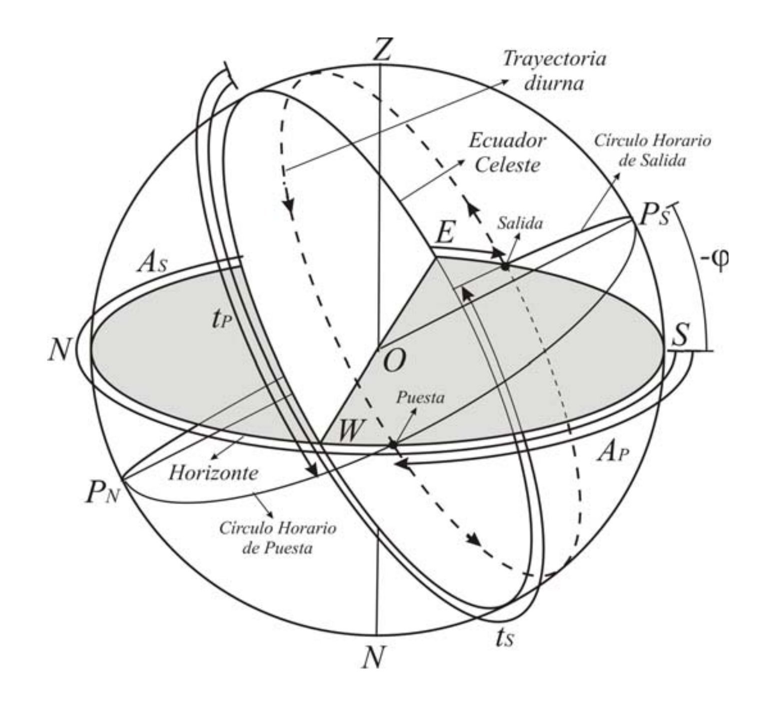



Figura VI-4

Se obtienen de ella los ángulos horarios de salida y de puesta ($t_S$ y $t_P$ respectivamente, ver Fig. VI-4).

Si ahora se plantea la siguiente fórmula de la transformación de coordenadas horizontales a ecuatoriales locales:

$$sen\ \delta = sen\ \varphi \cos z - \cos\ \varphi\ sen\ z \cos A$$

y se reemplaza $z = 90°$ y $A = A_{SP}$ resulta que:

$$sen\ \delta = -\cos\ \varphi\ \cos A_{SP} \qquad \text{o} \qquad \boxed{\cos A_{SP} = -\frac{sen\delta}{\cos\varphi}}$$

de donde se deducen los valores que toma el ácimut en la salida y en la puesta ($A_S$ y $A_P$ respectivamente, ver Fig. VI-4).

Ahora bien, según sea el par de valores $\varphi$ y $\delta$ utilizados (para una localidad y para un astro determinados), al reemplazarlos en las últimas expresiones deducidas, se pueden presentar siete casos distintos, que definen un conjunto

igual de zonas en la esfera celeste. Ellas se han graficado en la Fig. VI-5, donde se ha planteado la situación para el caso de un observador situado en el hemisferio sur, o sea que $\varphi < 0°$:

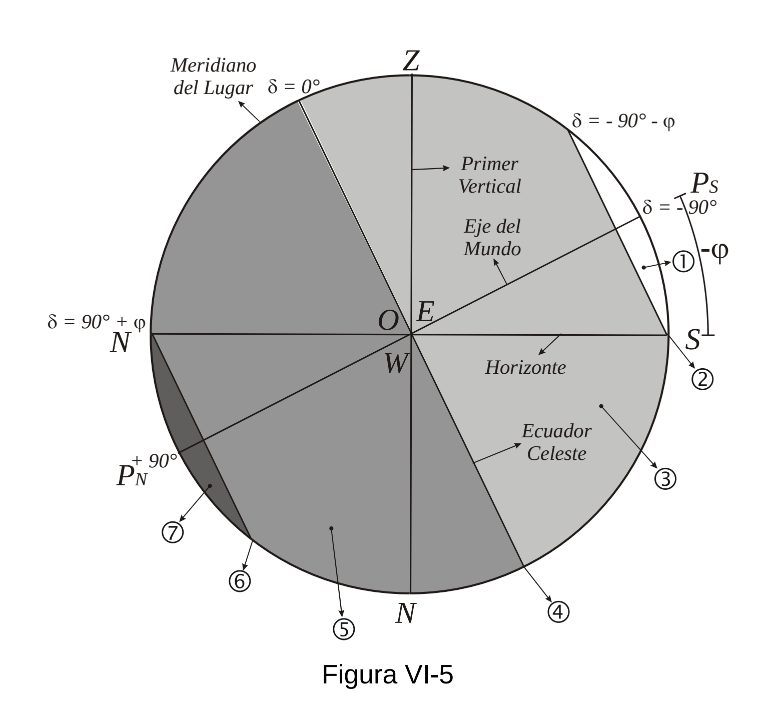


Figura VI-5

**Zona ①, Astros Circumpolares (*$\cos t_{SP} < -1$* y *$\cos A_{SP} > 1$*):** En este caso ninguna de las ecuaciones tiene solución, lo que indica que el astro no sale ni se pone. Esto ocurre cuando se trata de "astros circumpolares" para la latitud dada. Estos astros permanecen entonces $24^h$ por encima del horizonte.

**Zona ②, Círculo Limite de los Astros Circumpolares (*$\cos t_{SP} = -1$* y *$\cos A_{SP} = 1$*):** En este caso hay solo una solución para cada coordenada ($t_P \equiv t_S$ y $A_P \equiv A_S$) que son $t_{SP} = 12^h$ y $A_{SP} = 0°$, indicando que "el astro sale y se pone en el mismo punto sobre el horizonte" (el punto cardinal sur) y al mismo instante.

**Zona ③, Astros Visibles mas de 12$^h$ (*$-1 < \cos t_{SP} < 0$* y *$0 < \cos A_{SP} < 1$* ):** En este caso, existiendo dos valores de $t_{SP}$ ($t_S$ y $t_P$) y dos de $A_{SP}$ ($A_S$ y $A_P$) que resuelven el problema. El valor $t_P$ pertenece al cuadrante II, mientras que $t_S$ pertenece al III. Similarmente, $A_P$ pertenece al cuadrante I, mientras que $A_S$ pertenece al IV. Los primeros valores de cada coordenada ($t_P$ y $A_P$) indican

entonces el ángulo horario y el ácimut de puesta, mientras que los segundos ($t_S$ y $A_S$) los correspondientes valores a la salida. Este es el caso graficado en la Fig. VI-4.

**Zona ④, Astros Visibles 12$^h$ ($cos\ t_{SP} = 0$ y $cos\ A_{SP} = 0$):** Ahora nuevamente hay dos soluciones para cada coordenada que son: $t_P = 6^h$; $t_S = 18^h$ y $A_P = 90°$; $A_S = 270°$. Como $\varphi \neq 0°$, debe ser $\delta = 0°$, esto indica que el astro se encuentra en el plano del ecuador celeste, saliendo y poniéndose exactamente por los puntos cardinales Este y Oeste respectivamente. Es de notar que si fuese $\varphi = 0°$ (esfera recta) la condición de cos $t_{SP} = 0$ la cumplen todos los astros independientemente de su valor de $\delta$.

**Zona ⑤, Astros Visibles menos de 12$^h$ ($0 < cos\ t_{SP} < 1$ y $-1 < cos\ A_{SP} < 0$):** Aquí también hay dos valores de $t_{SP}$ y de $A_{SP}$ como solución. El valor $t_P$ pertenece al cuadrante I y $t_S$ pertenece al IV, mientras que $A_P$ pertenece al cuadrante II y $A_S$ pertenece al III. Siendo como en la zona ③, el primero de cada uno de los valores ($t_P$ y $A_P$) indica entonces el valor del ángulo horario y el ácimut de puesta y los segundos ($t_S$ y $A_S$) los de salida.

**Zona ⑥, Círculo Limite de los Astros No Visibles ($cos\ t_{SP} = 1$ y $cos\ A_{SP} = -1$):** En este caso resulta y existe solo una solución para cada coordenada ($t_P \equiv t_S$ y y $A_P \equiv A_S$) que son $t_{SP} = 0^h$ y $A_{SP} = 180°$, indicando, de igual forma que en la zona ② de la Fig. VI-5, que el astro sale y se pone en el mismo punto (el punto cardinal Norte) y al mismo instante.

**Zona ⑦ Astros No Visibles ($cos\ t_{SP} > 1$ y $cos\ A_{SP} < -1$):** En este caso, no existiendo solución para ninguna de las coordenadas. Esto indica que “el astro no sale ni se pone” y ocurre cuando se trata de astros que, para la latitud dada, permanecen siempre debajo del horizonte.

Cabe notar que en el caso de hacer el análisis para un observador localizado en el hemisferio norte, la única diferencia es el signo del $cos\ A_{SP}$ en cada una de las zonas.

Para determinar en forma más precisa el tiempo que un astro dado (observado desde una localidad dada) permanece por encima del horizonte, se observa la Fig. VI-4, de donde se puede deducir fácilmente que este valor viene expresado por:

$$\Delta T = 2\ t_P$$

donde $t_P$ es el ángulo horario de puesta del astro en consideración.

Es de notar, no obstante, que los valores de tiempo expresados en los casos anteriores están asociados con la velocidad a la que gira la esfera celeste, y esta no es igual a la que gira el Sol. Entonces, los tiempos dados son en realidad “tiempos sidéreos” y no “tiempos solares”. Estos valores determinados para los tiempos sidéreos son válidos para todos los astros que no pertenecen al sistema solar, siendo solo una primer aproximación para aquellos que si pertenecen. Esto se debe a que estos últimos poseen movimientos adicionales al diurno (movimientos propios) que pueden ser muy importantes, sobretodo en el caso de la Luna y del Sol.

**4. Cruce de un astro por el Primer Vertical**

Otra situación particular se produce cuando un astro cruza el Primer Vertical, ya sea al Este ($A = 270°$) o al Oeste ($A = 90°$) del meridiano del lugar.

Como se vio en el capítulo II (sec. 2.1; punto 4)., la expresión que vincula la distancia cenital ($z$), el ácimut ($A$), la declinación ($\delta$), la latitud del lugar ($\varphi$) y el ángulo horario ($t$) es:

$$sen\ z\ \ cos\ A = -\ cos\ \varphi\ \ sen\ \delta + sen\ \varphi\ \ cos\ \delta\ cos\ t$$

y en los instantes de cruce por el primer vertical se verifica que $\cos A = 0$ y es $t = t_{PV}$, por lo que la fórmula anterior se reduce a:

$$0 = -\cos\varphi\ \operatorname{sen}\delta + \operatorname{sen}\varphi\ \cos\delta \cos t_{PV}$$

$$\cos t_{PV} = \frac{\cos\varphi\ \operatorname{sen}\delta}{\operatorname{sen}\varphi\ \cos\delta}$$

o de otra forma: $$\boxed{\cos t_{PV} = \frac{tg\ \delta}{tg\ \varphi}}$$

obteniéndose de esta expresión los ángulos horarios de cruce por el primer vertical al Este y al Oeste del Meridiano del Lugar ($t_{PVE}$ y $t_{PVW}$ respectivamente, ver Fig. VI-6). Notándose que de la expresión pueden resultar dos ($t_{PVE}$ y $t_{PVW}$), una ($t_{PVE} = t_{PVW}$) o ninguna solución. El primero de los casos se grafica en la Fig. VI-6.

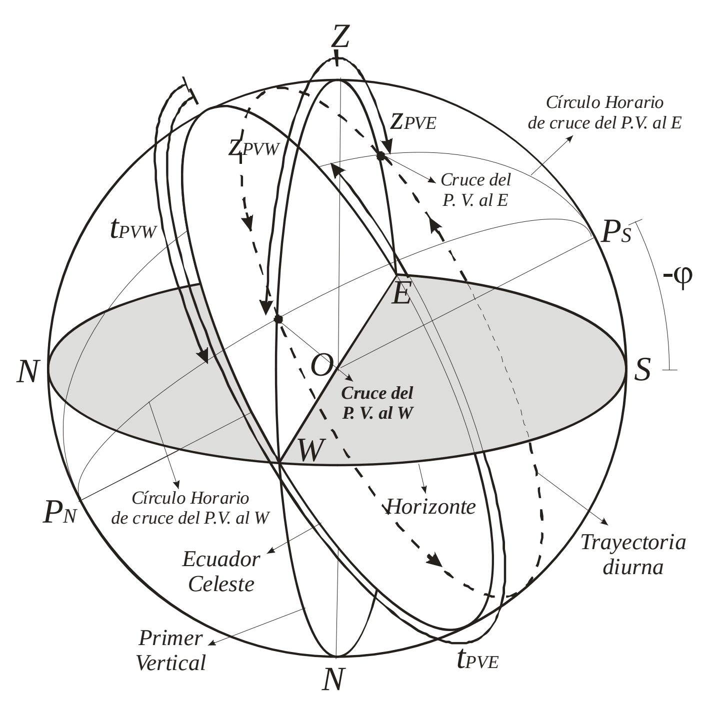



Figura VI-6

Si ahora se considera la siguiente fórmula de la transformación de coordenadas horizontales a ecuatoriales locales:

$$sen\ \delta = sen\ \varphi \cos z - \cos\ \varphi\ sen\ z \cos A$$

y se reemplaza $\cos A = 0$ y $z = z_{PV}$, resulta que:

$$sen\ \delta = sen\ \varphi \cos z_{PV} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\cos z_{PV} = \frac{sen\delta}{sen\varphi}}$$

de donde se deducen los valores que toma la distancia zenital cuando el astro cruza el primer vertical al Este y al Oeste ($z_{PVE}$ y $z_{PVW}$ respectivamente), aunque como $0° \leq z_{PV} \leq 180°$, se tendrá una ($z_{PVE} = z_{PVW}$) o ninguna solución (ver Fig. VI-6).

## 5. Máxima Elongación de un astro

Se dice que un astro (que no pertenece al Sistema Solar) se encuentra en Máxima Elongación cuando el **Angulo paraláctico ($\eta$)** es de $90°$. Se verifica que este hecho ocurre cuando la diferencia entre su Acimut y el correspondiente al polo elevado toman su valor máximo (en valor absoluto).

Si ahora se aplica la Fórmula de los Cinco Elementos a los Triángulos de Posición resulta que:

$$sen\ z \cos\ \eta = \cos\ \delta\ sen\ \varphi - \cos\ \varphi\ sen\ \delta \cos t$$

o

$$sen\ z \cos\ \eta = -\cos\ \delta\ sen\ \varphi + \cos\ \varphi\ sen\ \delta \cos t$$

y en el caso de máxima elongación se cumple que $\cos\ \eta = 0$ y $t = t_{ME}$, por lo que en ambos casos queda que:

$$0 = \cos\delta\ \operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi\,\operatorname{sen}\delta\cos t_{ME} \qquad \Rightarrow \qquad \cos t_{ME} = \frac{\cos\delta\ \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\delta\ \cos\varphi}$$

o de otra forma:

$$\boxed{\cos t_{ME} = \frac{tg\ \varphi}{tg\ \delta}}$$

Esta expresión puede tener dos ($t_{MEE}$ y $t_{MEW}$), una ($t_{MEE} = t_{MEW}$) o ninguna solución dependiendo de los valores de $\varphi$ y de $\delta$. El primero de los casos se grafica en la Fig. VI-7.

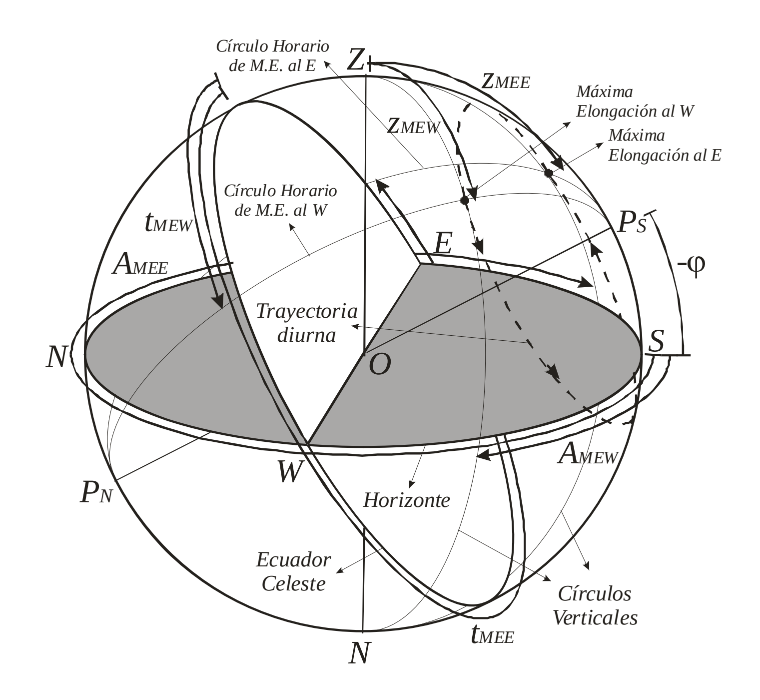



Figura VI-7

Si se compara esta relación con la que provee el ángulo horario de cruce por el primer vertical ($t_{PV}$), se observa que una es la inversa de la otra, de donde se deduce que ambas condiciones son mutuamente excluyentes: un astro corta el primer vertical o posee máxima elongación en algún momento de su movimiento diurno (solo se pueden dar ambos fenómenos si $\varphi = \delta$ en cuyo caso $\cos t_{PV} = \cos t_{ME} = 1$).

Aplicando ahora el Teorema del Coseno a los Triángulos de Posición de la Figs. V-9b y V-10b resulta que:

$$sen\ \varphi = sen\ \delta \cos z + \cos \delta\, sen\ z \cos \eta$$

o

$$-\ sen\ \varphi = -\ sen\ \delta \cos z + \cos \delta\, sen\ z \cos \eta$$

por lo que para la situación de máxima elongación ($\cos \eta = 0$ y $z = z_{ME}$) estas expresiones se reducen a:

$$sen\ \varphi = sen\ \delta \cos z_{ME} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\cos z_{ME} = \frac{sen \varphi}{sen \delta}}$$

que al igual que lo que sucedía con el ángulo horario, es la expresión inversa a la hallada para la distancia cenital del caso de cruce por el primer vertical. Similarmente, también se puede tener una ($z_{MEE} = z_{MEW}$) o ninguna solución para la ecuación (ver Fig. VI-7).

Si se considera el Teorema del Seno en los Triángulos de Posición anteriores, entonces se obtiene que:

$$\frac{sen\ \eta}{\cos\ \varphi} = \frac{sen\ A}{\cos\ \delta} \qquad \text{o} \qquad \frac{sen\ \eta}{\cos\ \varphi} = -\frac{sen\ A}{\cos\ \delta}$$

y cuando ocurre la máxima elongación sen $\eta = 1$ y $A = A_{ME}$, resulta que:

$$\boxed{sen\ A_{ME} = \pm \frac{\cos \delta}{\cos \varphi}}$$

siendo válido el signo positivo para el caso de máxima elongación al Oeste y el negativo para la máxima elongación al Este ($A_{MEW}$ y $A_{MEE}$ respectivamente, ver Fig. VI-7).

El hecho de que las situaciones de “Máxima Elongación” y “Cruce por el Primer Vertical” sean mutuamente excluyentes, permiten distinguir sobre la esfera celeste siete zonas similares análogas (aunque no iguales) a las descriptas en el la situación de “Salida y Puesta de un Astro”. Estas son las zonas que se han detallado en la Fig. VI-8 para el caso de un observador situado en el hemisferio sur (comparar, y no confundir, esta figura con la Fig. VI-5).

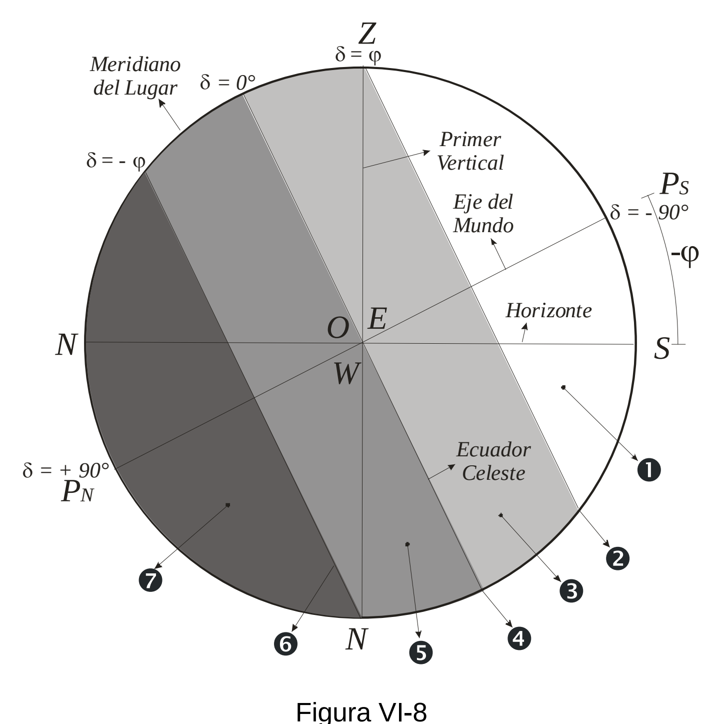



Figura VI-8

Las distintas zonas se caracterizan por:

**Zona ❶:** Astros que alcanzan Máxima Elongación

**Zona ❷:** Círculo Límite de los Astros que alcanzan Máxima Elongación

**Zona ❸:** Astros que cortan el Primer Vertical por encima del Horizonte

**Zona ❹:** Astros que cortan el Primer Vertical en los puntos cardinales Este y Oeste

**Zona ❺:** Astros que cortan el Primer Vertical por debajo del Horizonte (situación no observable)

**Zona ❻:** Círculo Límite de los Astros que cortan el Primer Vertical por debajo del Horizonte

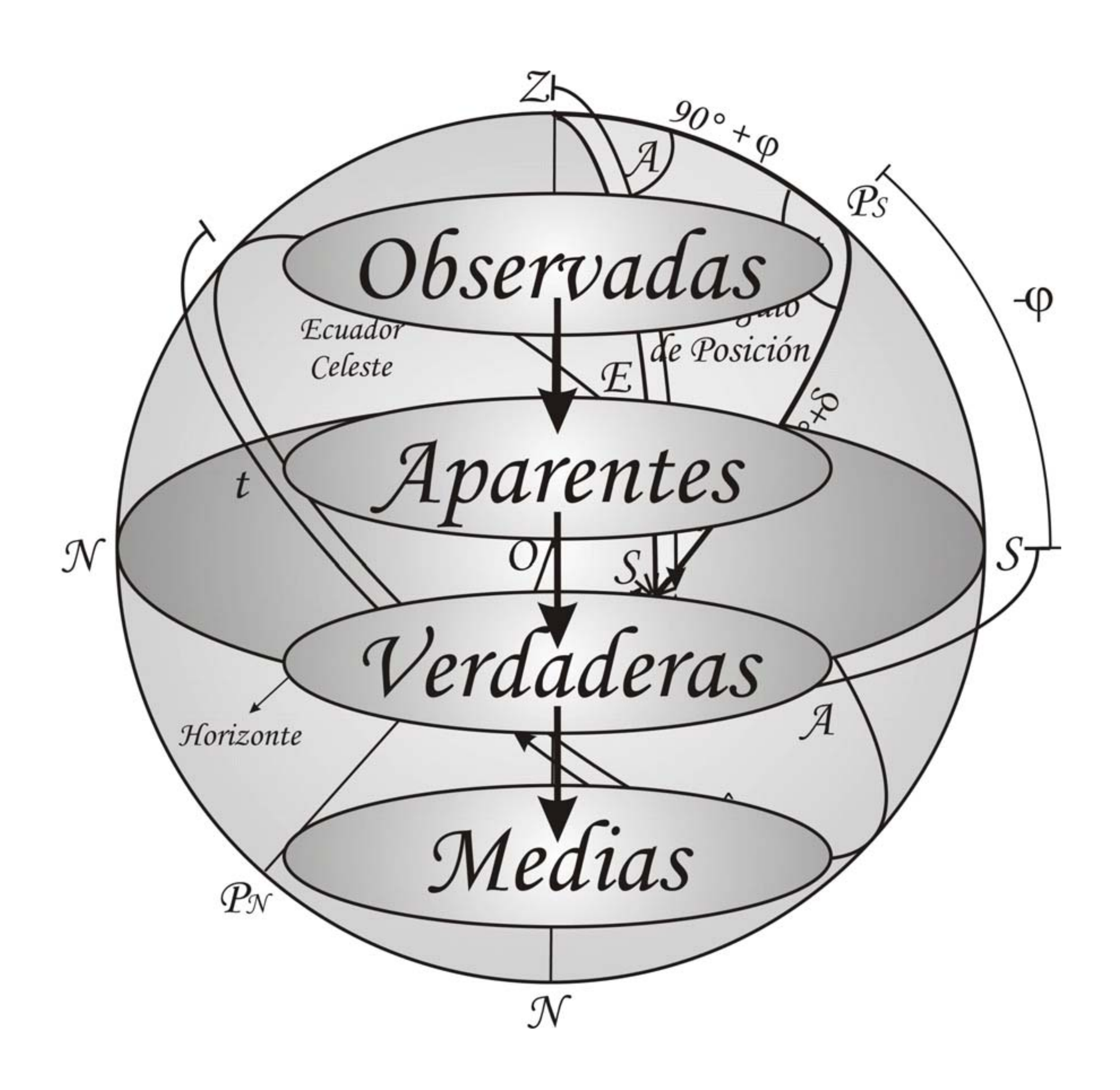
**Zona ❼:** Astros que no alcanzan Máxima Elongación ni cruzan el Primer Vertical

## 6. Resumen

| | ***z*** | ***A*** | ***t*** |
|---|---|---|---|
| **Culminación Superior (*t* = 0*h*)** | $z_{CS} = \pm(\varphi - \delta)$ | $A_{CS} = 0° \text{ ó } 180°$ | $t_{CS} = 0^h$ |
| **Salida y Puesta (*h* = 0°)** | $z_{SP} = 90°$ | $\cos A_{SP} = -\frac{sen\,\delta}{\cos\varphi}$ | $\cos t_{SP} = -tg\ \varphi\ tg\ \delta$ |
| **Cruce del Primer Vertical (*A* = ±90°)** | $\cos z_{PV} = \frac{sen\,\delta}{sen\,\varphi}$ | $A_{PV} = 90° \text{ o } 270°$ | $\cos t_{PV} = \frac{tg\ \delta}{tg\ \varphi}$ |
| **Máxima Elongación (*η* = 90°)** | $\cos z_{ME} = \frac{sen\,\varphi}{sen\,\delta}$ | $sen\ A_{ME} = \pm\frac{\cos\delta}{\cos\varphi}$ | $\cos t_{ME} = \frac{tg\ \varphi}{tg\ \delta}$ |

## CAPÍTULO VII

# Corrección de las Posiciones Observadas




La esfera celeste y diferentes tipos de posiciones

## 1. Introducción

En general las observaciones de la posición de un astro sobre la esfera celeste conllevan un proceso de reducción. Este proceso se relaciona por un lado con el instrumental utilizado y por otro con efectos sistemáticos que dependen de las condiciones en que se realizó la observación. La finalidad del proceso de reducción es lograr que la posición del astro sea independiente tanto del instrumental como de la posición del observador y del momento en que se hizo la observación. De esta forma se pueden confeccionar catálogos celestes.

En este capítulo se describen en forma elemental los principales efectos sistemáticos que afectan a las observaciones de la posición de un astro. Ellos son:

- Refracción atmosférica
- Paralajes diurna y anual
- Aberraciones diurna y anual
- Precesión y Nutación

Cada uno de estos efectos provoca en principio correcciones pequeñas en las posiciones, por lo que en una primer aproximación se los puede considerar independientes entre si y pueden aplicarse en cualquier orden, aunque el orden siguiente es el convencional:

- Corrección por refracción atmosférica
- Corrección por paralaje diurna
- Corrección por aberración diurna
- Corrección por paralaje anual
- Corrección por aberración anual
- Corrección por nutación
- Corrección por precesión

## 2. Refracción Atmosférica

La luz proveniente de cada astro, al penetrar del vacío del espacio a la atmósfera terrestre, sufre en ella un cambio de dirección. A este fenómeno se lo denomina refracción. Dado que la densidad de la atmósfera se incrementa a medida que disminuye la altura sobre la superficie de la Tierra, la luz continúa refractándose hasta que llega a la superficie. De esta forma el rayo de luz se hace curvilíneo y alcanza al observador por una dirección más próxima a la vertical del lugar que en el caso en el que no existiera atmósfera (ver Fig. VII-1).

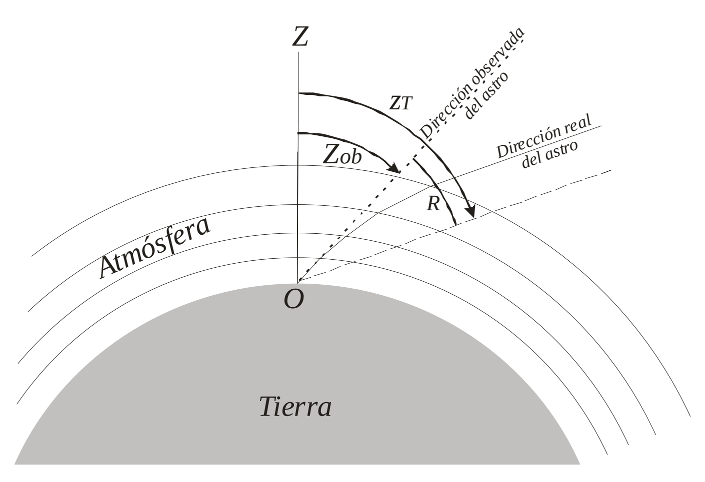



Figura VII-1

El fenómeno descripto en el párrafo anterior en su conjunto se denomina Refracción Atmosférica y en concreto, lo que ocasiona es que disminuye las distancias cenitales de los astros. O sea, la distancia zenital observada ($z_{ob}$) es menor que la distancia cenital ($z_T$) que tendría un astro si no hubiera atmósfera. Se define entonces a la corrección por refracción al valor:

$$R = z_T - z_{ob}$$

El valor de $R$ es nulo para un astro que se encuentra en el zenit, mientras que se incrementa notablemente a medida la posición del astro es más cercana al horizonte, tomando en el horizonte mismo un valor cercano a *35'*.

Haciendo un modelo conocido como **Atmósfera de capas planas y paralelas**, se encuentra que una expresión aproximada para $R$ viene dada por:

$$R[rad] = (n\text{-}1)\ tg\ z_{ob}$$

o

$$R[''] = k\ tg\ z_{ob}$$

con $k = 206265''\ (n\text{-}1)$, y donde $n$ es el índice de refracción del aire en el lugar de la observación. Este valor depende de la presión atmosférica ($P$) y de la temperatura del aire ($T$), resultando que:

$$R = 60.25'' \left[ \frac{P[\,hPa\,]}{1013} \frac{273°}{(\,273° + T\,[\,°C\,])} \right] tg\ z_{ob}$$

donde $P$ se halla expresada en *hectopascales* ($hPa$) y $T$ en *grados centígrados* ($°C$). Entonces, cuando $P = 1013\ hPa$ y $T = 0\ °C$ se obtiene que:

$$\boxed{R = 60.25''\ tg\ z_{ob}}$$

Es de notar que si $z_{ob} = 90°$ la expresión dada anteriormente diverge ($R \to \infty$), ello se debe a que es válida solo para $z_{ob} < 45°$, aunque se la puede tomar como una aproximación hasta $z_{ob} = 70°$. Más allá, se debe utilizar otra expresión más precisa que tenga en cuenta los efectos de la curvatura de la Tierra, como la siguiente:

$$R = \frac{P}{(\,273 + T\,)} \frac{(\,0.1594 + 0.0196\ h_{ob} + 0.00002\ h_{ob}^2\,)}{(\,1 + 0.505\ h_{ob} + 0.0845\ h_{ob}^2\,)}$$

donde $h_{ob}$ es la altura observada expresada en *grados*. No obstante, para valores de $z_{ob}$ cercanos a los $90°$ se necesitan tablas empíricas especiales.

Finalmente, dado un par de coordenadas horizontales observadas de un astro ($z_{ob}$ y $A_{ob}$), las coordenadas horizontales topocéntricas ($z_T$ y $A_T$) corregidas por el fenómeno de refracción atmosférica son:

$$z_T = z_{ob} + R$$
$$A_T = A_{ob}$$

Se nota que este fenómeno no afecta el valor del ácimut.

## 3. Paralaje

Las posiciones observadas de los astros surgen de la proyección del mismo sobre la superficie de la esfera celeste. En el caso de los astros relativamente cercanos, esa proyección puede variar de posición el observador se encuentra en diferentes lugares. Este fenómeno se denomina **paralaje**.

En particular, si el observador se encuentra en un lugar u otro sobre la superficie de la Tierra, al fenómeno se lo conoce como paralaje diurna y la corrección respecto a un sistema de coordenadas geocéntrico es $p_d$ (ver Fig. VII-2). Este caso es notorio para los astros cercanos que pertenecen al Sistema Solar. No obstante, la posición de la proyección también se ve alterada si la observación se realiza en diferentes épocas del año, ya que cambia la posición del observador por el movimiento de la Tierra alrededor del Sol. En este caso, al fenómeno se lo denomina paralaje anual y la corrección respecto a un sistema de coordenadas heliocéntrico es $p_a$ (ver Fig. VII-3). Este caso afecta a las posiciones de las estrellas más cercanas al Sol.

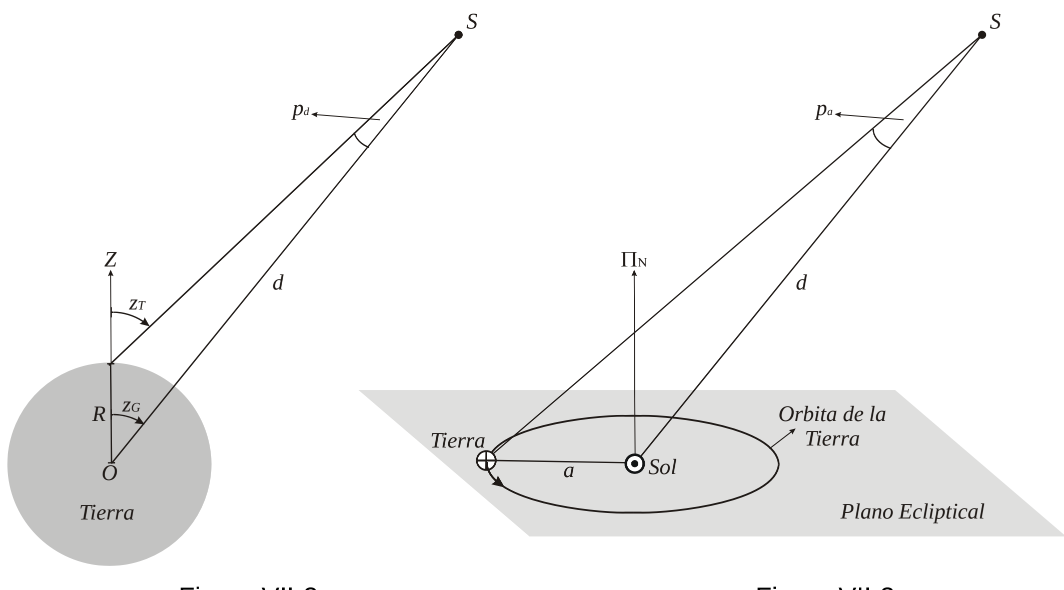



Figura VII-2 Figura VII-3

Se nota entonces, que siempre que se mencione la paralaje diurna, ella estará referida a objetos del Sistema Solar, mientras que la paralaje anual lo estará con objetos externos a él.

Se define ahora formalmente:

- **Paralaje ecuatorial horizontal ($p_O$):** Se denomina así al ángulo bajo el cual desde un astro se ve el radio ecuatorial *"R"* de la Tierra (ver Fig. VII-4).

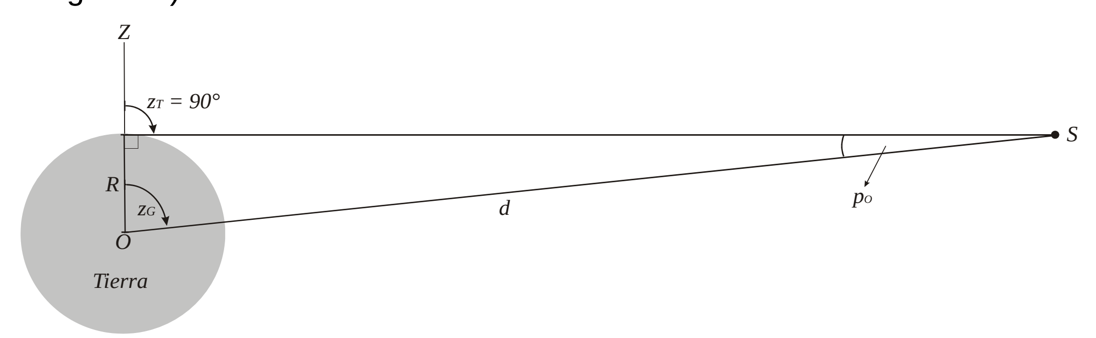



Figura VII-4

- **Paralaje anual ($\pi$):** Se denomina así al ángulo bajo el cual desde un astro (que se encuentra fuera del Sistema Solar) se ve el semieje mayor *"a"* de la órbita terrestre (ver Fig. VII-5).

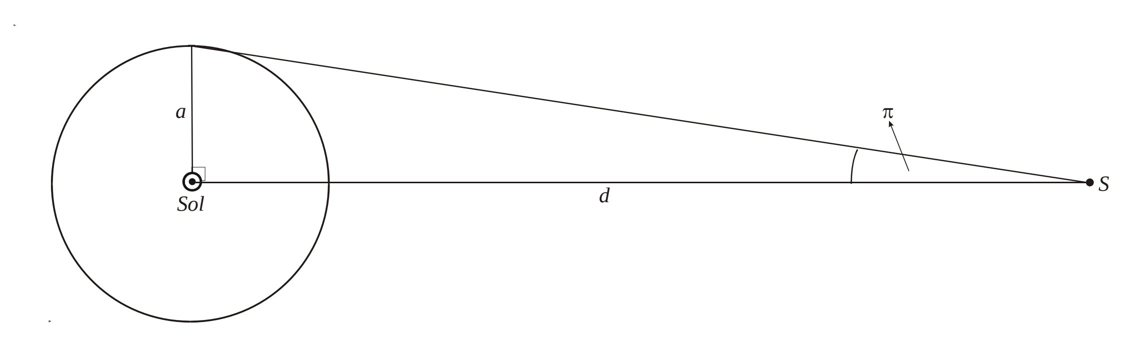



Figura VII-5

Cabe notar que, si bien $p_a$ y $\pi$ se denominan ambas "paralaje anual", sus valores son dos entidades diferentes, $p_a$ es la corrección que hay que aplicar a la posición de un astro por este fenómeno, mientras que $\pi$ es el valor definido anteriormente. Esto quedará más claro en el desarrollo de la sección 3.2.

### 3.1. Paralaje Diurna

Como se mencionó anteriormente, esta es la corrección por paralaje que se le debe aplicar a la posición de un astro para transformar de un sistema

**topocéntrico** a uno **geocéntrico**. Se nota entonces de la Fig. VII-7 que para ello es conveniente trabajar en un sistema horizontal, donde la única coordenada afectada es la distancia cenital, resultando que:

$$z_G = z_T - p_d$$

donde $z_G$ y $z_T$ son las distancias cenitales geocéntrica y topocéntrica respectivamente.

Ahora, planteando el "Teorema del seno para triángulos planos" en la Fig. VII-2, se obtiene que:

$$\frac{R}{sen\ p_d} = \frac{d}{sen\ z_T} \qquad \Rightarrow \qquad sen\ p_d = \frac{R}{d}\ sen\ z_T$$

siendo $d$ la distancia desde el centro de la Tierra al astro y $R$ el radio de la Tierra que se considera esférica. Si en la última expresión se considera que el valor de $p_d$ es siempre muy pequeño, $sen\ p_d \approx p_d$ expresado en radianes y se puede escribir que:

$$p_d = \frac{R}{d}\ sen\ z_T$$

Se observa que el valor máximo que puede tomar $p_d$ ocurre si $z_T = 90°$. En este caso $sen\ z_T = 1$ y se obtiene el valor de la paralaje ecuatorial horizontal ($p_O$, ver Fig. VII-4) correspondiente a ese instante, o sea para ese valor de distancia. De manera que:

$$\boxed{p_{d\ MAX} = p_o = \frac{R}{d}} \qquad \Rightarrow \qquad p_d = p_o\ sen\ z_T$$

Resultando finalmente que, dado un par de coordenadas **horizontales topocéntricas** de un astro ($z_T$ y $A_T$), las coordenadas **horizontales geocéntricas** ($z_G$ y $A_G$) corregidas por el fenómeno de paralaje diurna son:

$$z_G = z_T - p_O \, sen \, z_T$$
$$A_G = A_T$$

Notándose que este fenómeno no afecta el valor del ácimut.

### 3.2. Paralaje Anual

Esta es la corrección por paralaje que se debe aplicar a la posición de un astro para transformar de un sistema **topocéntrico** a uno **heliocéntrico**.

De acuerdo con la definición dada anteriormente para paralaje anual ($\pi$) y la Fig. VII-5, se puede expresar que:

$$tg \ \pi = \frac{a}{d}$$

donde $d$ es la distancia del Sol al astro en consideración. Y como normalmente $\pi$ es un ángulo pequeño, $tg \ \pi \approx \pi$ expresado en radianes, entonces queda que:

$$\pi [ \, rad \, ] = \frac{a}{d}$$

o

$$\pi [\, '' \,] = 206265'' \ \frac{a}{d}$$

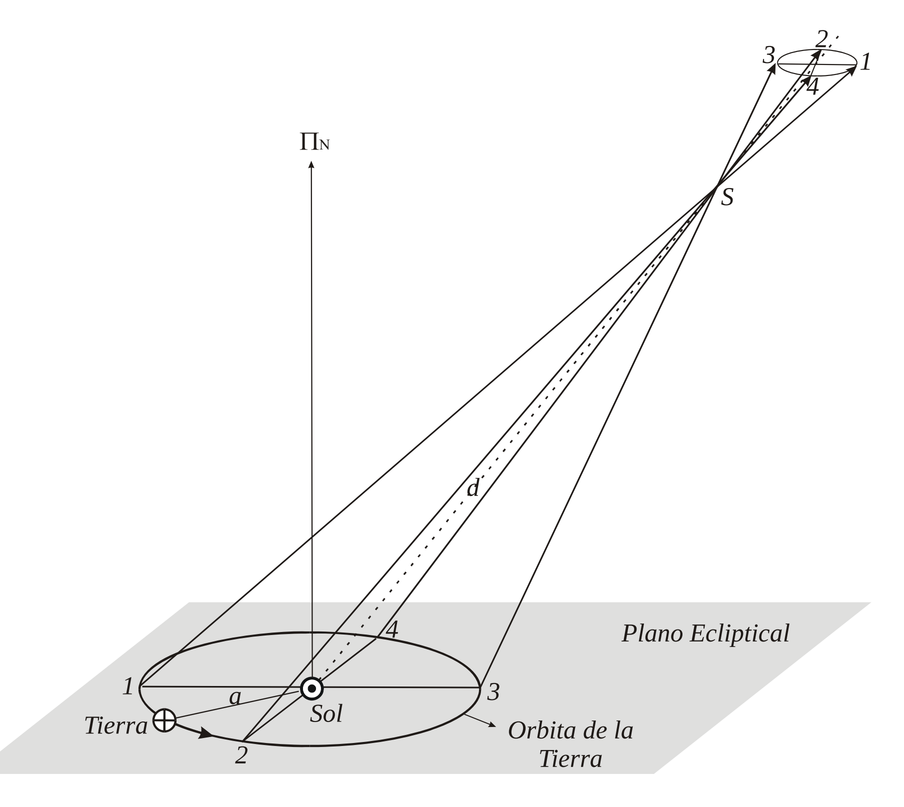



Figura VII-6

Para hallar la corrección por paralaje anual ($p_a$) se plantea el gráfico de la Fig. VII-6. Allí se representa como es cambio de la dirección en la que se observa un astro (*S*) a medida que la Tierra va recorriendo su órbita pasando sucesivamente pos los puntos *1*, *2*, *3* y *4* y cuales son las líneas de la visual en cada uno de esos casos (segmentos *11*, *22*, *33* y *44* respectivamente) y en el caso observar el astro desde el Sol (línea a trazos).

A partir de la Fig. VII-6 se pueden notar entonces que:

- Dado que el cambio de posición del observador es periódico (anual) el cambio de posición del astro en consideración también lo será y su posición describirá cierta figura cerrada sobre la esfera celeste.
- El cambio de posición sobre la esfera celeste debido a la paralaje anual será, en cada instante, en la dirección en la que se encuentra el Sol en ese momento (ver también Fig. VII-7a)
- Como la posición del observador se encuentra sobre el plano de la eclíptica (en la órbita de la Tierra), la forma de esa figura estará relacionado directamente con las coordenadas eclipticales del astro.

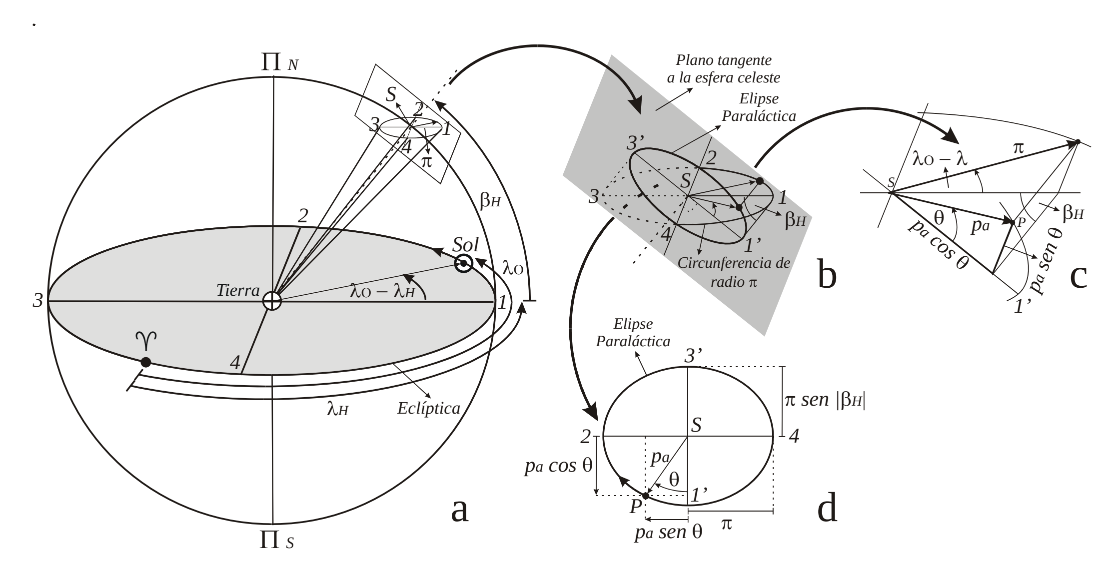



Figura VII-7

Para encontrar que clase de dibujo describe el astro anualmente, en la Fig. VII-7a se representa la situación anterior, pero sobre una esfera celeste geocéntrica, mientras que en la Fig. VII-7b se detalla la zona de esa esfera donde se proyecta el astro. Debido a que la corrección por paralaje anual siempre consiste en un desplazamiento muy pequeño respecto de la posición heliocéntrica (*S*), en esa zona se puede aproximar la esfera al plano tangente a ella que pasa por el punto *S*. Se nota ahora que, el triángulo *"1-Sol-S"* de la Fig. VII-6 es semejante al triángulo *"1-S-Tierra"* de la Fig. VII-7a, entonces es válida la relación:

$$\frac{a}{d} = \frac{\overline{S-1}}{\overline{Tierra-S}}$$

pero el segmento $\overline{Tierra-S}$ es el radio de la esfera celeste (de valor unitario), de manera que:

$$\overline{S-1} \approx \frac{a}{d} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{S-1} \approx \pi$$

Como este mismo razonamiento se puede hacer para cualquier otro punto de la órbita de la Tierra, resulta que la curva *"1 2 3 4"* detallada en la Fig. VII-7b es una circunferencia de radio $\pi$ (paralaje anual del astro). La curva observada sobre la esfera celeste es la proyección de esta circunferencia sobre el plano graficado y se obtiene la curva *"1'2 3'4'"*.

Para averiguar que tipo de curva es esta última se hace la construcción auxiliar de la Fig. VII-7c, de donde se puede deducir que:

$$p_a \, sen \; \theta = \pi \, sen \; (\lambda_O - \lambda_H)$$
$$p_a \cos \; \theta = \pi \cos \; (\lambda_O - \lambda_H) \; sen \; \beta_H$$

aunque, como se mencionó anteriormente, la corrección por paralaje anual es un valor muy pequeño y a los fines de evaluar la funciones trigonométricas de las ecuaciones anteriores son válidas las aproximaciones:

$$p_a \, sen \; \theta \approx \pi \, sen \; (\lambda_O - \lambda_G)$$
$$p_a \cos \; \theta \approx \pi \cos \; (\lambda_O - \lambda_G) \; sen \; \beta_G$$

pero además:

$$\Delta\lambda = \lambda_G - \lambda_H = p_a \, sen \; \theta / \cos \beta_H$$
$$\Delta\beta = \beta_G - \beta_H = - p_a \cos \; \theta$$

donde $\Delta\lambda$ y $\Delta\beta$ son las diferencias entre las coordenadas geocéntricas y las heliocéntricas. El factor $\cos \beta_H$ que aparece en la expresión de $\Delta\lambda$ se debe a la relación que existe entre los arcos de un círculo máximo (la eclíptica, donde se mide $\lambda$) y un círculo paralelo (donde se encuentra el astro $S$).

Juntando adecuadamente ambos pares de ecuaciones resulta que:

$$\Delta\lambda = \pi \, sen \; (\lambda_O - \lambda_H) / \cos \beta_H$$
$$\Delta\beta = - \pi \cos \; (\lambda_O - \lambda_H) \; sen \; \beta_H$$

o:

$$\Delta\lambda \approx \pi \, sen \, (\lambda_O - \lambda_G) \, / \, cos \, \beta_G$$

$$\Delta\beta \approx - \, \pi \, cos \, (\lambda_O - \lambda_G) \, sen \, \beta_G$$

o de otra forma:

$$\pi \, sen \, (\lambda_O - \lambda_H) = \Delta\lambda \, cos \, \beta_H$$

$$\pi \, cos \, (\lambda_O - \lambda_H) = - \, \Delta\beta \, / \, sen \, \beta_H$$

y elevando ahora cada expresión al cuadrado y sumando resulta:

$$\pi^2 \, [sen^2 \, (\lambda_O - \lambda_H) + cos^2 \, (\lambda_O - \lambda_H)] = \Delta\lambda^2 \, cos^2 \, \beta_H + \Delta\beta^2 \, / \, sen^2 \, \beta_H$$

o

$$\frac{(\Delta\lambda \, cos \, \beta_H)^2}{\pi^2} + \frac{\Delta\beta^2}{(\pi \, sen \, \beta_H)^2} = 1$$

que es la ecuación de una elipse centrada en la posición heliocéntrica. Dicha elipse (ver Fig. VII-7d) se denomina **elipse paraláctica** y tiene como semiejes a los siguientes valores:

| | |
|---|---|
| semieje mayor = $\pi$ | Localizado en un círculo paralelo al plano de la eclíptica |
| semieje menor = $\pi \, sen \, \lvert\beta_H\rvert$ | Localizado en un círculo perpendicular al plano de la eclíptica |

Se pueden notar entonces las siguientes características:

- Si el astro $S$ se encuentra sobre el plano de la eclíptica ($\beta = 0°$) la elipse degenera en un segmento, mientras que si se halla en uno de los polos eclipticales ($|\beta| = 90°$) la elipse se transforma en una circunferencia.
- Cualquiera sea el valor de $\beta$, el valor máximo que puede tomar la corrección por paralaje anual es:

$$\boxed{p_{aMAX} = \pi = \frac{a}{d}}$$

- La posición geocéntrica del astro (punto $P$ de la Fig. VII-7) siempre se encuentra desplazada respecto de la posición heliocéntrica (punto $S$ de

la Fig. VII-7) en la dirección en la que se halla el Sol respecto de la Tierra.

Finalmente, dado un par de **coordenadas eclipticales geocéntricas** de un astro ($\lambda_G$ y $\beta_G$), las **coordenadas eclipticales heliocéntricas** ($\lambda_H$ y $\beta_H$) corregidas por el fenómeno de paralaje anual serán:

$$\lambda_H = \lambda_G - \pi \, sen\, (\lambda_O - \lambda_G) / \cos \beta_G$$

$$\beta_H = \beta_G + \pi \cos (\lambda_O - \lambda_G)\, sen\, \beta_G$$

Es importante notar que no se debe confundir "la paralaje anual $\pi$ utilizada en esta sección" con el "valor matemático" de $3.141592$...

### 3.3. Paralaje y Distancia

Por lo desarrollado en las dos secciones anteriores se observa que tanto la paralaje ecuatorial horizontal ($p_O$) como la paralaje anual ($\pi$) dependen en forma inversa con la distancia al astro en consideración. Como se mencionó anteriormente, en el primer caso se tratará siempre de astros del Sistema Solar, mientras que en el segundo de astros que no pertenecen a él.

Entonces, los valores que se dan de las paralajes de los astros son una medida de la distancia a la que se encuentran. A mayor valor de la paralaje más cercano estará el astro y viceversa. En particular, para el caso de la paralaje anual, en base al concepto anterior, se define una unidad de distancia que es un pársec ($d = 1\ pc$) como la distancia a la que debe encontrarse un astro para que su paralaje anual sea de $1''$. Como se tenía que: $\pi [''] = 206265''\, a/d$ (con $a$ y $d$ expresadas en las mismas unidades), por la definición de pársec:

$$1'' = 206265'' \frac{a\ [pc]}{1 pc}$$

entonces, adoptando en la primer expresión al pársec como unidades tanto para a como para $d$ y haciendo luego el cociente de ambas expresiones resulta que:

$$\pi['' ] = \frac{1''}{1pc}\,\frac{1}{d[\,pc\,]}$$ o simplemente, $$\boxed{\pi['' ] = \frac{1}{d[\,pc\,]}}$$

### 4. Aberración

La observación de los astros consiste en detectar la luz que proviene de ellos. Pero dado que un rayo luminoso posee una velocidad finita y que observador se encuentra en movimiento, ambos hechos provocan una composición de velocidades que altera la posición de los astros sobre la esfera celeste. A ese fenómeno se lo conoce con el nombre de **aberración**, ver Fig. VII-8.

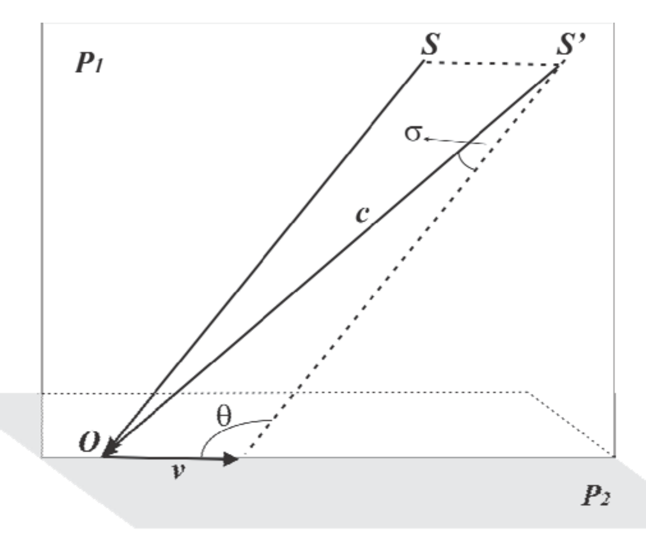



Figura VII-8

De este último gráfico se nota que el ángulo en el que se ve alterada la posición del objeto observado ($\sigma$) surge aplicando el "teorema del seno para triángulos planos" como:

$$sen\ \sigma = \frac{v}{c}\ sen\ \theta$$

siendo $v$ la velocidad del observador, $c = 299\ 792\ km/s$ la velocidad de la luz y $\theta$ es el ángulo que existe entre las direcciones de las velocidades anteriores. Si en la última expresión se considera que el valor de $\sigma$ es siempre muy pequeño, $sen\ \sigma \approx \sigma$ expresado en radianes y se puede escribir que:

$$\sigma[\,rad\,] = \frac{v}{c}\,sen\,\theta$$

En particular, si el movimiento del observador es debido a la rotación de la Tierra, al fenómeno se lo conoce como **aberración diurna** y la corrección para pasar de un sistema de coordenadas geocéntrico aparente a uno geométrico es $a_d$. No obstante, si el movimiento del observador es debido a la traslación de la Tierra, al fenómeno se lo denomina **aberración anual** y la corrección para pasar de un sistema de coordenadas heliocéntrico aparente a uno geométrico es $a_a$.

Se define ahora:

- **Constante de Aberración Diurna ($\alpha_d$):** Se denomina así a la corrección por aberración diurna que resulta en el caso de que la dirección velocidad de la luz es perpendicular a la dirección de la velocidad del observador producida por la rotación de la Tierra.
- **Constante de Aberración Anual ($\alpha_a$):** Se denomina así a la corrección por aberración anual que resulta en el caso de que la dirección velocidad de la luz es perpendicular a la dirección de la velocidad del observador producida por la traslación de la Tierra.

### 4.1. Aberración Anual

Esta es la corrección por aberración que se debe aplicar a la posición de un astro para corregirla por el **movimiento de traslación** de la Tierra.

De acuerdo con la definición dada anteriormente para la constante de aberración anual ($\alpha_a$), se puede expresar que:

$$tg\ \alpha_a = \frac{v_{trans}}{c}$$

donde $v_{trans}$ es el módulo de la velocidad de translación de la Tierra alrededor del Sol ($v_{trans} \approx 30\ km/s$) y $c$ es el módulo de la velocidad de la luz. Resulta entonces que:

$$\alpha_a = 20.492''$$

El desarrollo matemático para hallar la corrección por aberración anual ($\alpha_a$) es bastante complejo y no se hará su desarrollo, sin embargo los efectos son, en cierto aspecto, parecidos (no iguales) a los expresados anteriormente para la paralaje anual (ver Fig. VII-7), o sea:

- Como el cambio de la dirección de la velocidad del observador es periódico (anual) el cambio de posición del astro en consideración también lo será, por lo que su posición describirá cierta figura cerrada sobre la esfera celeste.
- El cambio de posición sobre la esfera celeste debido a la aberración anual será, en cada instante, en la dirección del movimiento de la Tierra, o sea en cuadratura con la dirección en la que se encuentra el Sol en ese momento (ver Fig. VII-8 y Fig. VII-9a)
- Como la dirección de la velocidad del observador se encuentra sobre el plano de la eclíptica (tangente a la órbita de la Tierra), la forma de esa figura estará relacionado directamente con las coordenadas eclipticales del astro.

La situación se ha representado en la Fig. VII-9, donde se verifica que la curva que describe el astro es, en general, una elipse centrada en la posición heliocéntrica geométrica. A esa elipse se la denomina **elipse aberracional** y posee como semiejes a los siguientes valores:

| | |
|---|---|
| semieje mayor = $\alpha_a$ | Localizado en un círculo paralelo al plano de la eclíptica |
| Semieje menor = $\alpha_a\ sen\ \lvert\beta\rvert$ | Localizado en un círculo perpendicular al plano de la eclíptica |

donde $\beta$ es la latitud ecliptical del astro en consideración.

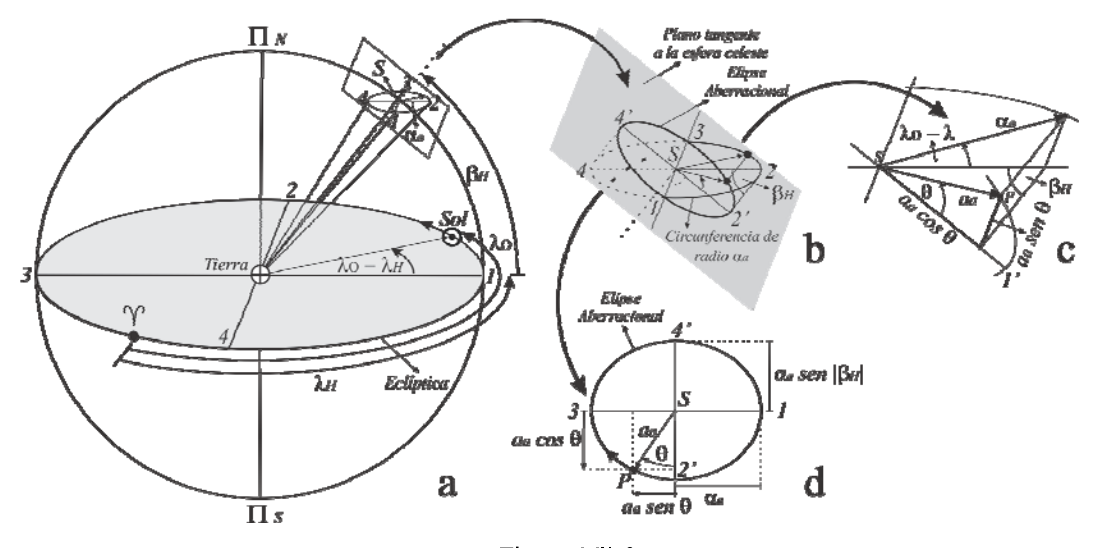



Figura VII-9

En particular, si el astro se encuentra sobre el plano de la eclíptica ($\beta = 0°$) la elipse degenera en un segmento, mientras que si el astro se halla en uno de los polos eclipticales ($|\beta| = 90°$) la elipse se transforma en una circunferencia.

Cualquiera sea el valor de $\beta$, el valor máximo que puede tomar la corrección por paralaje anual es:

$$\boxed{a_{aMAX} = \alpha_a}$$

En forma similar la lo deducido para el caso de paralaje anual, la corrección de las **coordenadas eclipticales heliocéntricas** de un astro ($\lambda_H$ y $\beta_H$) por efecto de aberración anual será:

$$\lambda'_H = \lambda_H + \alpha_a \cos(\lambda_O - \lambda_H) / \cos \beta_H$$

$$\beta'_H = \beta_H - \alpha_a \, sen(\lambda_O - \lambda_H) \, sen \, \beta_H$$

## 4.2 Aberración Diurna

Como se mencionó anteriormente, esta es la corrección por aberración que se le debe aplicar a la posición de un astro para corregirla por el movimiento de rotación de la Tierra.

Por la expresión de $\sigma$ dada anteriormente:

$$a_d\,[\,rad\,] = \frac{v_{rot}}{c}\,sen\,\theta$$

Se observa que el valor máximo que puede tomar $a_d$ ocurre si $\theta = 90°$. En este caso $sen\,\theta = 1$ y se obtiene el valor de la constante de aberración diurna, ($\alpha_d$, ver Fig. VII-8), o sea que:

$$\boxed{a_{d\,MAX} = \alpha_d = \frac{v_{rot}}{c}}$$

y, analizando el último cociente, se obtiene que el valor de $\alpha_d$ viene dado por:

$$\alpha_d\,[\,''\,] = 206265''\,\frac{v_{rot}}{c} = 206265''\,\frac{2\pi\,R\cos\varphi}{cT}$$

ya que $v_{rot} = (2\,\pi\,R\,\cos\,\varphi)\,/\,T$, donde $R$ es el radio de la Tierra, $T$ su período de revolución sidéreo y $\varphi$ la latitud del lugar de observación. Reemplazando valores resulta que:

$$\alpha_d = 0.319''\,\cos\,\varphi$$

Para encontrar el cambio de posición debido a la aberración diurna se utiliza esta expresión y un razonamiento análogo al correspondiente al utilizado para el caso de la aberración anual, pero ahora considerando coordenadas ecuatoriales locales en lugar de eclipticales. Resulta entonces que cada una de las componentes de dicho cambio de posición es:

$$a_{dt} = -\ 0.319'' \cos\varphi \cos t_G$$
$$a_{d\delta} = 0.319'' \cos\varphi\ \text{sen}\ t_G\ \text{sen}\ \delta_G$$

Ahora bien, la corrección debida a la aberración diurna correspondiente al ángulo horario, se lleva a cabo sobre el círculo paralelo al ecuador en el que se encuentra el astro y a esa variación le corresponde una variación $\Delta t$ que se mide sobre el plano del ecuador, ver Fig. VII-13. Entonces se puede deducir en forma sencilla, que la relación entre ambas magnitudes viene dada por:

$$a_{dt} = \Delta t\ \cos\delta_G$$

o sea :

$$\Delta t = a_{dt} \sec\delta_G$$

Resultando finalmente que, dado un par de **coordenadas ecuatoriales locales geocéntricas** de un astro ($t_G$ y $\delta_G$), las coordenadas corregidas por el fenómeno de aberración diurna son:

$$t'_G = t_G - 0.0213s \cos\varphi\ \cos t_G\ \sec\delta_G$$
$$\delta'_G = \delta_G + 0.319'' \cos\varphi\ \text{sen}\ t_G\ \text{sen}\ \delta_G$$

donde, dado que el ángulo horario se mide normalmente en el sistema horario, se han transformado los segundos de arco a segundos de tiempo en la expresión correspondiente.

## 5. Precesión y Nutación

La orientación del eje de rotación de la Tierra no permanece inalterada respecto a la posición media de las estrellas. El eje terrestre posee un movimiento de balanceo en sentido retrógrado (similar al cabeceo de un trompo al girar). Ahora bien, dado que el eje del mundo y el plano del ecuador celeste se encuentran ligados con la orientación del eje de rotación, ellos también se verán alterados, juntamente con la posición de los equinoccios (♈ y ♎), ver Fig. VII-10.

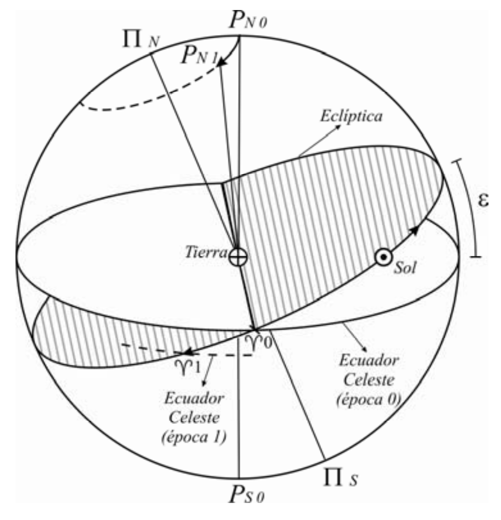



Figura VII-10

La causa de ese balanceo es que la Tierra no posee una masa distribuida en forma homogénea, ni es una esfera perfecta. Ello provoca que las fuerzas externas, especialmente las atracciones gravitatorias del Sol y de la Luna afecten la orientación del eje de rotación. Dicho balanceo se puede considerar formado por dos movimientos superpuestos:

- Precesión lunisolar
- Nutación

Además de la acción de la Luna y del Sol, se encuentra la acción de los planetas (de mucho menor cuantía), que perturba la posición del plano de la

órbita de la Tierra, la eclíptica, originando otra alteración en las coordenadas denominada **precesión planetaria**.

A continuación se detalla como afecta cada uno de estos fenómenos a la posición de un astro sobre la esfera celeste.

### 5.1. Precesión Lunisolar

Esta componente del movimiento hace que el eje del mundo describa un cono (en sentido retrógrado) en torno al eje de la eclíptica. Esto altera la posición del ecuador celeste y provoca la **precesión de los equinoccios** también en sentido retrógrado y como consecuencia de ello, las coordenadas ecuatoriales celestes ($\alpha$ y $\delta$) y la longitud ecliptical ($\lambda$) se verán afectadas por este fenómeno. Se nota que tanto la latitud ecliptical ($\beta$) como la oblicuidad de la eclíptica ($\varepsilon$) no se ven alteradas.

A continuación se determinará, entonces, como es la variación de las coordenadas ecuatoriales celestes, debido a la precesión lunisolar ($LS$). Se parte para ello, de las relaciones entre coordenadas ecuatoriales celestes y eclipticales dadas en la sección 2.3 del capítulo V, o sea:

$$\begin{aligned} sen\,\delta &= sen\,\beta\,\cos\varepsilon + \cos\beta\,sen\,\varepsilon\,sen\,\lambda \\ \cos\delta\,sen\,\alpha &= -\,sen\,\beta\,sen\,\varepsilon + \cos\beta\,\cos\varepsilon\,sen\,\lambda \\ \cos\delta\,\cos\alpha &= \cos\beta\,\cos\lambda \end{aligned}$$

y derivando las dos primeras expresiones respecto del tiempo resulta:

$$(\cos\delta)\,\dot{\delta}_{LS} = (\cos\beta\,sen\,\varepsilon\,\cos\lambda)\,\dot{\lambda}_{LS}$$

$$-(sen\,\delta\,sen\,\alpha)\,\dot{\delta}_{LS} + (\cos\delta\,\cos\alpha)\,\dot{\alpha}_{LS} = (\cos\beta\,\cos\varepsilon\,\cos\lambda)\,\dot{\lambda}_{LS}$$

o sea:

$$\dot{\delta}_{LS} = \frac{\cos\beta\cos\lambda}{\cos\delta}\,sen\,\varepsilon\,\dot{\lambda}_{LS}$$

$$\dot{\alpha}_{LS} = \frac{\cos\beta\cos\varepsilon\cos\lambda}{\cos\delta\cos\alpha}\,\dot{\lambda}_{LS} + \frac{sen\,\delta\,sen\,\alpha}{\cos\delta\cos\alpha}\,\dot{\delta}_{LS}$$

pero, utilizando la tercera relación entre las coordenadas eclipticales y las ecuatoriales celestes, resulta que:

$$\dot{\delta}_{LS} = sen\,\varepsilon\cos\alpha\,\dot{\lambda}_{LS}$$

$$\dot{\alpha}_{LS} = \cos\varepsilon\,\dot{\lambda}_{LS} + tg\,\delta\,\frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}\,\dot{\delta}_{LS}$$

o

$$\dot{\delta}_{LS} = sen\,\varepsilon\cos\alpha\,\dot{\lambda}_{LS}$$

$$\dot{\alpha}_{LS} = \cos\varepsilon\,\dot{\lambda}_{LS} + tg\,\delta\,sen\,\alpha\,sen\,\varepsilon\,\dot{\lambda}_{LS}$$

y agrupando resulta:

$$\dot{\delta}_{LS} = sen\,\varepsilon\cos\alpha\,\dot{\lambda}_{LS}$$

$$\dot{\alpha}_{LS} = (\cos\varepsilon + tg\,\delta\,sen\,\alpha\,sen\,\varepsilon)\dot{\lambda}_{LS}$$

o de otra manera, se puede decir, que dado un par de coordenadas ecuatoriales celestes ($\alpha$ y $\delta$), la corrección por presesión lunisolar se obtiene con las siguientes expresiones:

$$\Delta\alpha_{LS} = \Delta\lambda_{LS}\,(\cos\varepsilon + tg\,\alpha\,sen\,\varepsilon)\,\Delta t$$

$$\Delta\delta_{LS} = \Delta\lambda_{LS}\,(sen\,\varepsilon\,\cos\alpha)\,\Delta t$$

donde se ha considerado que:

$$\dot{\alpha}_{LS} = \left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{LS} \approx \left.\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right|_{LS} \qquad \dot{\delta}_{LS} = \left.\frac{d\delta}{dt}\right|_{LS} \approx \left.\frac{\Delta\delta}{\Delta t}\right|_{LS} \qquad \dot{\lambda}_{LS} = \left.\frac{d\lambda}{dt}\right|_{LS} \approx \left.\frac{\Delta\lambda}{\Delta t}\right|_{LS}$$

## 5.2. Precesión Planetaria

En las expresiones halladas en la sección anterior se ha considerado solo los efectos denominados seculares producidos pos el Sol y por la Luna. Si además se consideran los efectos debido a los planetas, ellos alteran la posición del plano de la eclíptica, provocando una precesión de los equinoccios en sentido directo y como consecuencia de esta, las coordenadas eclipticales ($\lambda$ y $\beta$) y la ascensión recta ($\alpha$) se verán afectadas por este fenómeno. Se nota, no obstante, que la declinación ($\delta$) no se ve alterada.

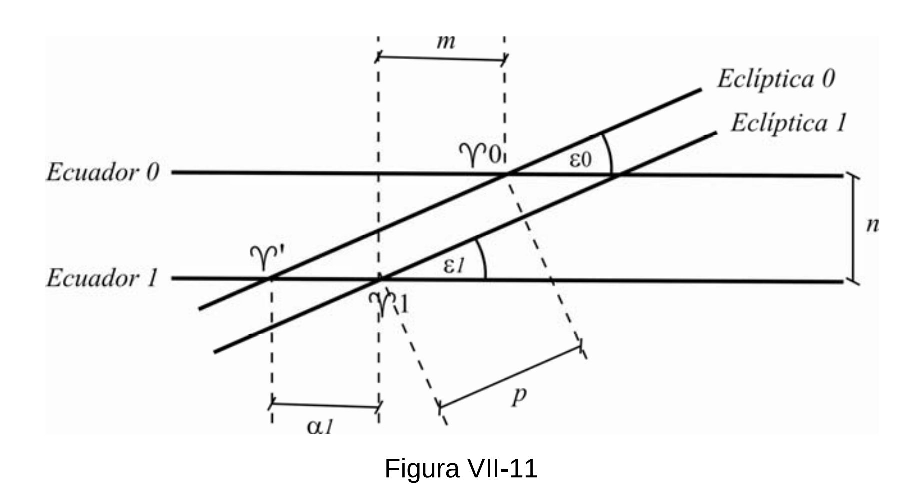



Figura VII-11

La combinación de los efectos de los fenómenos de precesión lunisolar y de presesión planetaria sobre la posición del punto ♈ se ven representados en la Fig. VII-11. Dado que la variación de las coordenadas ecuatoriales celestes debido a la precesión total (lunisolar y planetaria) vienen dadas por:

$$\Delta\alpha_P = \Delta\alpha_{LS} + \Delta\alpha_{PL}$$

$$\Delta\delta_P = \Delta\delta_{LS} + \Delta\delta_{PL}$$

entonces, resulta que:

$$\Delta\alpha_{LS} = (m + n\ tg\ \alpha)\ \Delta t$$

$$\Delta\delta_{LS} = (n\ \cos\ \alpha)\ \Delta t$$

donde:

$m = (\Delta\lambda/\Delta t) \cos \varepsilon - \alpha_1$ → constante de precesión anual en ascensión recta

$n = (\Delta\lambda/\Delta t)\ sen\ \varepsilon$ → constante de precesión anual en declinación

$p = (\Delta\lambda/\Delta t) - \alpha_1 \cos \varepsilon$ → constante de precesión anual general

$\alpha_1$ → constante de precesión planetaria anual

$\varepsilon$ → oblicuidad de la eclíptica

Estas ‘constantes’, en realidad son valores que varían muy lentamente de un año a otro y los valores que resultaron para el año 2000 fueron los siguientes:

$m = 46.1246$ ”/año

$n = 20.0430$ “/año

$p = 50.2909$ “/año

$\alpha_1 = 0.1051$ “/año

$\varepsilon = 23° 26' 21.21''$

## 5.3. Nutación

Dado que las fuerzas que producen el balanceo del eje de rotación de la Tierra no son uniformes (varían a lo largo del tiempo). El cono que describen los polos celestes alrededor de los polos de la eclíptica no es perfecto, sino que presenta pequeñas oscilaciones, a ellas se las conoce como el efecto de nutación. Esas oscilaciones se pueden describir diciendo que los polos celestes ($P_V$) describen pequeñas elipses alrededor de la posición media ($P_M$) que los polos celestes tendrían si solo existiese la precesión (ver Fig. VII-12). Los semiejes de esas elipses son de *9.2”* y *6.8”* (mayor y menor respectivamente).

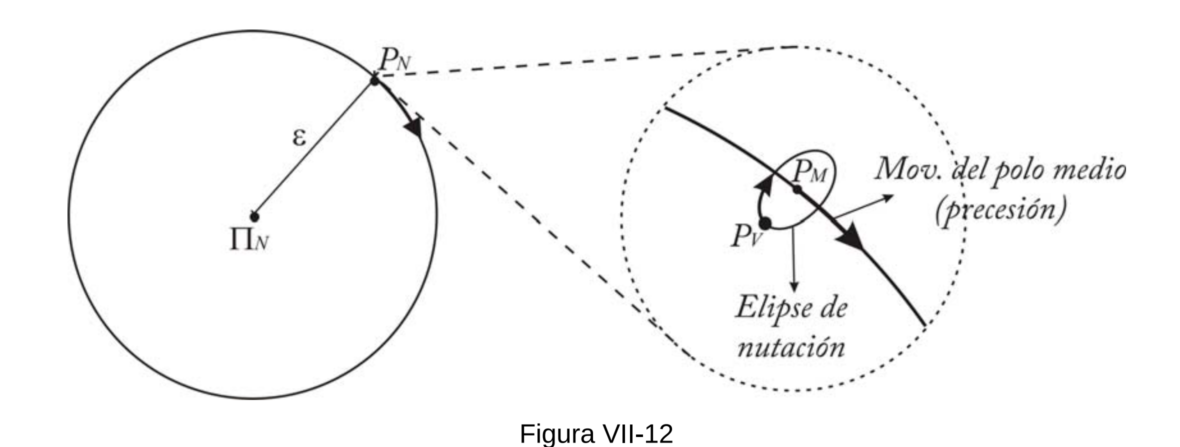



Figura VII-12

La corrección de las coordenadas ecuatoriales celestes debido al fenómeno de la nutación se obtienen en forma similar a lo planteado para el caso de la precesión y la forma resultante es la siguiente:

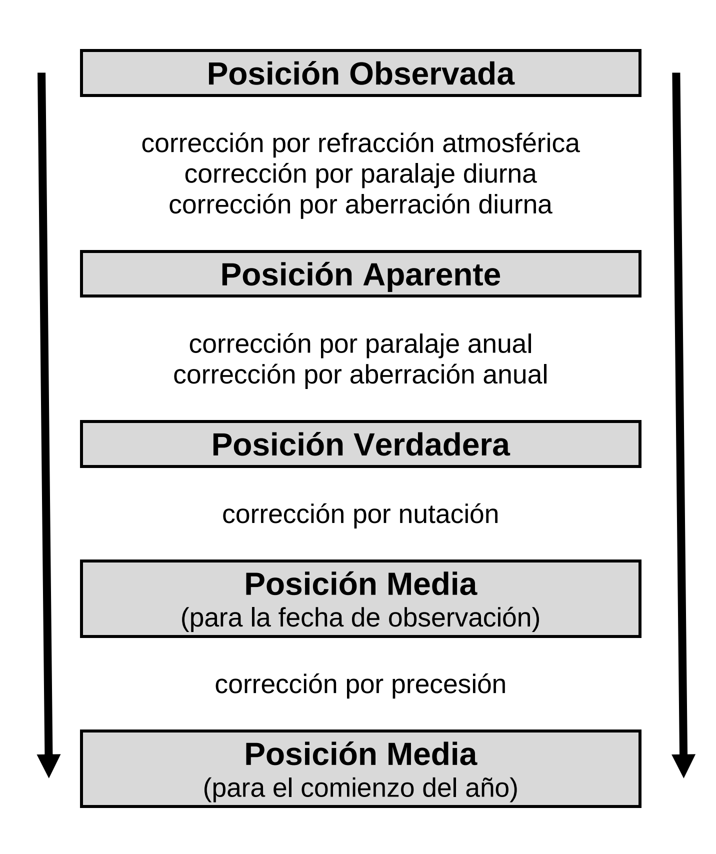
$$\Delta\alpha_{Nut} = f + g\ sen(G + \alpha)\ tg\ \delta$$

$$\Delta\delta_{Nut} = g\ cos(G + \alpha)$$

donde los valores de $f$, $g$ y $G$ dependen de la fecha de observación y se encuentran en tablas especiales.

## 6. Resumen

El procedimiento habitual a aplicar a las coordenadas que brindan la posición de un astro es el siguiente, produciendo diferentes denominaciones de las coordenadas obtenidas en cada paso:



**CAPÍTULO VIII**

# Las Constelaciones y los Signos del Zodiaco




Representación de las constelaciones del hemisferio austral.

"Prodromus Astronomia" de Johannes Hevelius publicado en 1690

## 1. Introducción

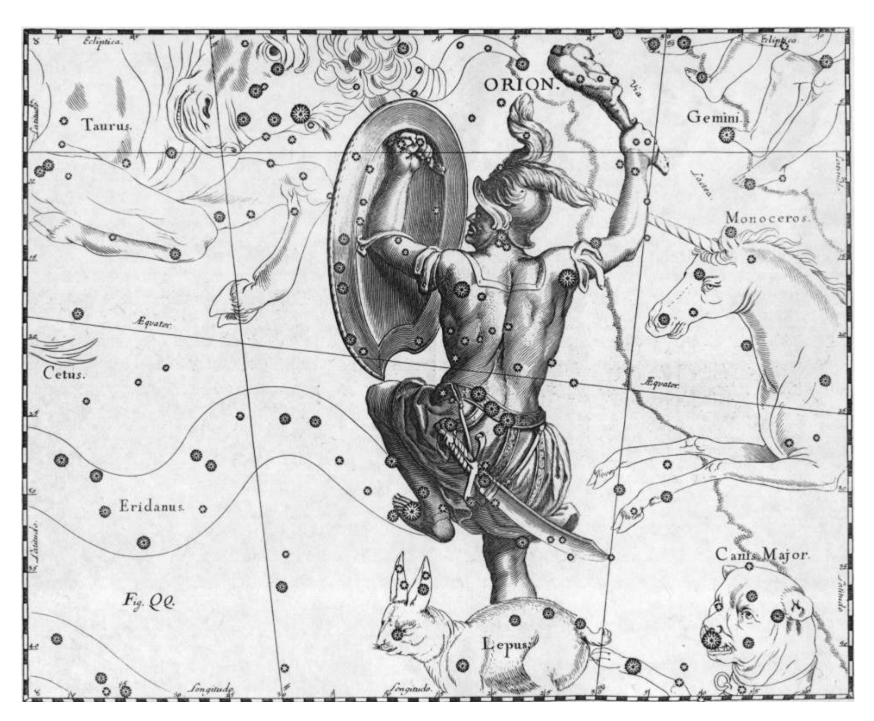
En muchas culturas ha sido interesante pensar que la esfera celeste es algo rígido en la que los cuerpos celestes (estrellas, nebulosas, etc.) se hallan ubicados de tal forma que puede establecerse una relación entre ellos. Como consecuencia, muchas civilizaciones antiguas unieron determinadas estrellas (y/o incluso zonas oscuras) dando origen a formas particulares y formando dibujos sobre la esfera celeste. Esos dibujos que consisten simplemente, en su mayoría, en la unión caprichosa de puntos se denominan “constelaciones”. De esta forma, las constelaciones son simplemente inventos basados en la imaginación humana que consisten en configuraciones particulares de estrellas (y/o nebulosas) sobre la esfera celeste.

Los pueblos antiguos, tratando de entender el universo por medio de la creación de la mitología, asignaron a esos grupos de estrellas, los nombres de sus dioses, héroes y animales de fábula. Cabe reconocer, sin embargo, que salvo unas pocas excepciones, los patrones de las estrellas de las constelaciones poseen muy poco parecido con los personajes y con las criaturas a las que se supone representan. En realidad, la conexión es más bien simbólica que literal. No obstante, desde el punto de vista práctico, las constelaciones proveen un sistema muy útil que permite la localización e identificación de estrellas individuales y zonas del cielo en forma sencilla. Por este motivo las constelaciones se siguen utilizando incluso a nivel profesional.

## 2. Las Constelaciones

En la actualidad, las constelaciones consisten en regiones sobre la esfera celeste (no la unión de ciertas estrellas o nebulosas). De esta forma la totalidad de la esfera celeste se halla dividida oficialmente en 88 constelaciones que sirven como una forma aproximada y conveniente para ubicar la posición de los objetos sobre ella.

Los objetos que conforman una constelación no poseen normalmente ninguna relación física entre si. O sea, ellos solo se nos presentan situados hacia aproximadamente una misma dirección en el espacio vistos desde la Tierra, pero se pueden encontrar realmente a distancias muy diferentes de nosotros y entre ellos.




Representación de la constelación de Orion
"Prodromus Astronomia" de Johannes Hevelius

Dado que el origen de las constelaciones es fruto de su evolución a lo largo de la historia, las distintas constelaciones pueden cubrir regiones de muy diferentes forma y tamaño sobre la esfera celeste. Así la constelación que

cubre una región más grande sobre el cielo es *Hydra* (la serpiente marina) siendo una figura larga y dispersa que cubre un área que es 19 veces mayor que la correspondiente a la constelación más chica, *Crux* (la cruz del sur). Por otro lado, algunas constelaciones poseen patrones de estrellas brillantes que permiten reconocerlas fácilmente, como es el caso de *Orión* (el cazador), mientras que otras constelaciones son débiles y más difíciles de identificar.

Los antiguos griegos reconocían un total de 48 constelaciones, incluidas las 12 constelaciones del zodiaco, que son aquellas por las que el Sol transita en su camino anual (la eclíptica). Además de esas 48, varias otras constelaciones fueron agregadas con el transcurso del tiempo.

Los primeros cartógrafos celestes, dibujaron las figuras de las constelaciones a su gusto, ya que no existía una forma normalizada para cada una de ellas, ni siquiera una lista homogénea de ellas. Entonces, cada cartógrafo era libre de introducir nuevas constelaciones, reformar u omitir las invenciones de otros. Como consecuencia, las figuras de las constelaciones se superponían entre ellas algunas veces y este hecho hacía que diferentes constelaciones vecinas compartiesen algunas estrellas.

Este estado de confusión se mantuvo hasta el año 1930 cuando la Unión Astronómica Internacional (IAU – International Astronomical Union), que es el cuerpo gubernamental de la astronomía, adoptó la lista de 88 constelaciones que se conocen actualmente, además de establecer en forma precisa cuales eran los límites de cada una de ellas por medio de coordenadas ecuatoriales.

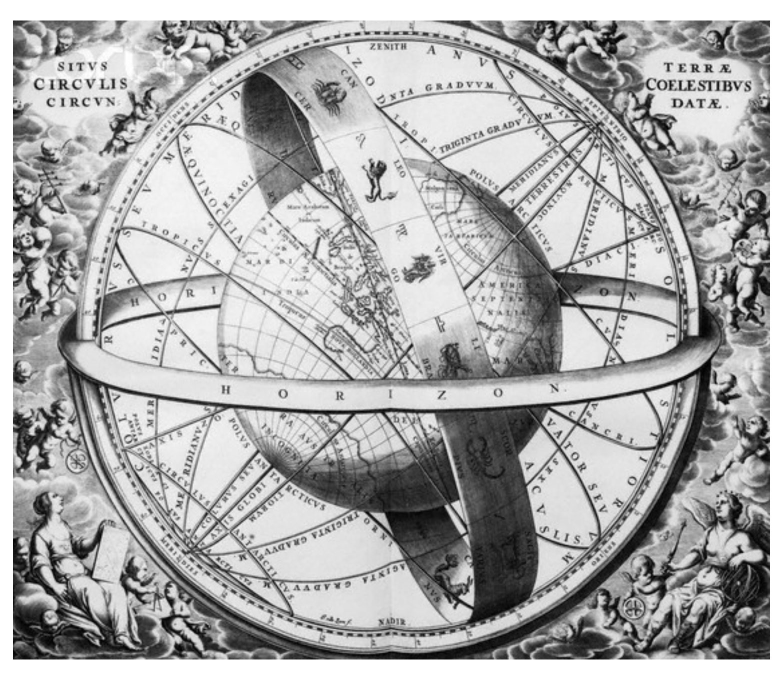
## 3. El Zodiaco, sus Signos y sus Constelaciones

Como se mencionó anteriormente, el zodiaco (del latín *zodiacus*, y este del griego *zodiakos*, animal), es la zona o banda del cielo, de unos *18°* a *20°* de amplitud, por cuyo centro pasa la eclíptica.

Aparentemente fueron los astrólogos de Babilonia los que dividieron originalmente esta banda en 12 porciones o “casas del Sol” a las que dicho astro iba recorriendo una tras otra en el transcurso el año. En cada una de estas “casas”, en un principio, estaba ubicada una constelación de las llamadas zodiacales. De esta forma, dada la distinta extensión que cubre cada una de esas constelaciones, las divisiones resultaban muy desiguales entre si. Más tarde, para homogeneizar la situación, Hiparco dividió el zodiaco en 12 partes iguales de *30°* (*360°/12*) cada una y las denominó “signos del zodiaco”. El primer signo, llamado *Aries*, se tomó a partir desde el punto vernal ♈, hacia el oriente; le seguían de esta forma *Taurus*, *Gemini*, *Cancer*, etc. En cuanto a los nombres asignados a los signos, fueron tomados de las constelaciones más cercanas a los mismos. Debido al fenómeno de la precesión que desplaza lentamente la posición del punto vernal ♈, actualmente no puede establecerse dicha concordancia lógica entre un signo del zodiaco y la constelación del mismo nombre. O sea que la preseción provoca que “los signos” se desplacen con respecto a “las constelaciones” en el sentido retrógrado en aproximadamente *1°* por cada 70 años.

### 3.1. Los Signos del Zodiaco

La tabla siguiente indica las fechas en que el Sol entra en cada uno de los signos del zodiaco.



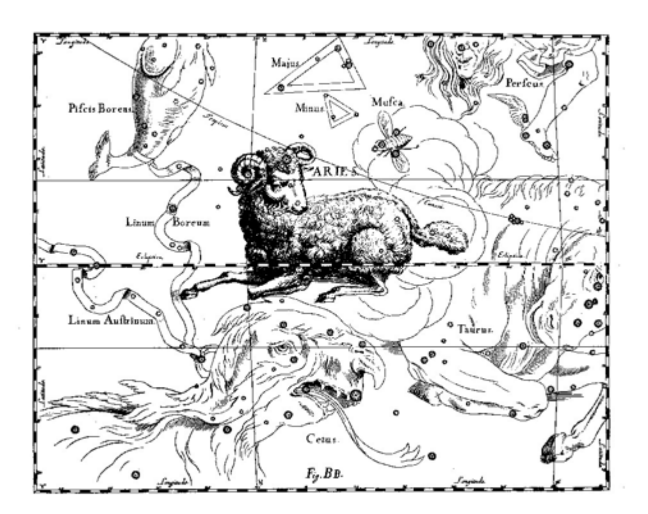

Representación de la banda del zodíaco alrededor de la Tierra.
Andreas Cellarius en *Harmonia macrocosmica* (Placa 11)
http://www.staff.science.uu.nl/~gent0113/cellarius/cellarius_plates.htm

| Fecha | | Signo |
|---|---|---|
| 21 de Marzo | ♈ | Aries |
| 20 de Abril | ♉ | Taurus |
| 21 de Mayo | ♊ | Gemini |
| 21 de Junio | ♋ | Cancer |
| 23 de Julio | ♌ | Leo |
| 23 de Agosto | ♍ | Virgo |
| 23 de Septiembre | ♎ | Libra |
| 24 de Octubre | ♏ | Scorpius |
| 23 de Noviembre | ♐ | Sagittarius |
| 22 de Diciembre | ♑ | Capricornius |
| 20 de Enero | ♒ | Aquarius |
| 19 de Febrero | ♓ | Piscis |

## 3.2. Mitología y Características de las Constelaciones del Zodiaco

Las representaciones corresponden al Atlas de J. Hevelius

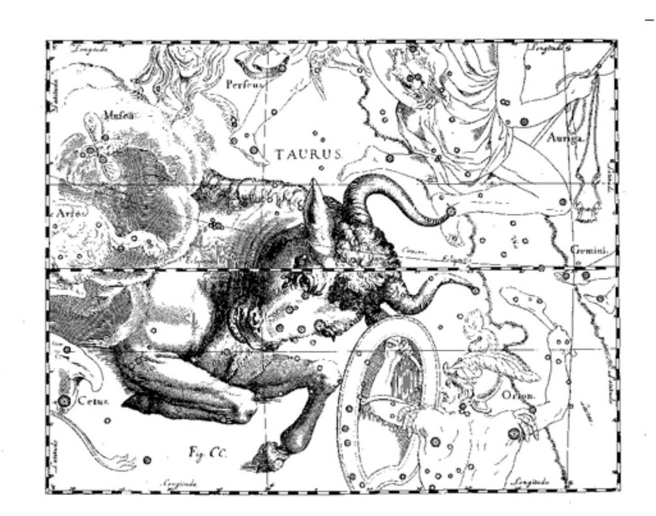
### ♈ - Aries: El Carnero




Los antiguos babilonios, egipcios, persas y griegos conocían a este grupo de estrellas como el Carnero. En una versión de la leyenda griega, el rey Tesalia tenía dos hijos, Frixo y Hele. El dios Hermes envió un carnero con un Vellocino de oro para conducirlos a buen puerto sobre su lomo. Hele cayó del carnero cuando volaba por el estrecho que divide Europa de Asia, una masa de agua que los griegos llamaron Hellespont, que significa el mar de Hele (ahora conocido como los Dardanelos). Frixo fue conducido a las constas del mar Negro, donde sacrificó al carnero y dejó el Vellocino bajo la custodia de un dragón. Es aquí donde Jasón y los Argonautas protagonizaron su robo.

Aries es la primera constelación del zodiaco, ya que el Sol en cierta época entró en ella el día del equinoccio del punto vernal, justo cuando atraviesa desde la mitad meridional de la esfera celeste a la septentrional. Sin embargo debido a la precesión de la Tierra, el Sol se sitúa actualmente en la constelación de Piscis durante ese equinoccio.

## ♉ - Taurus: El Toro

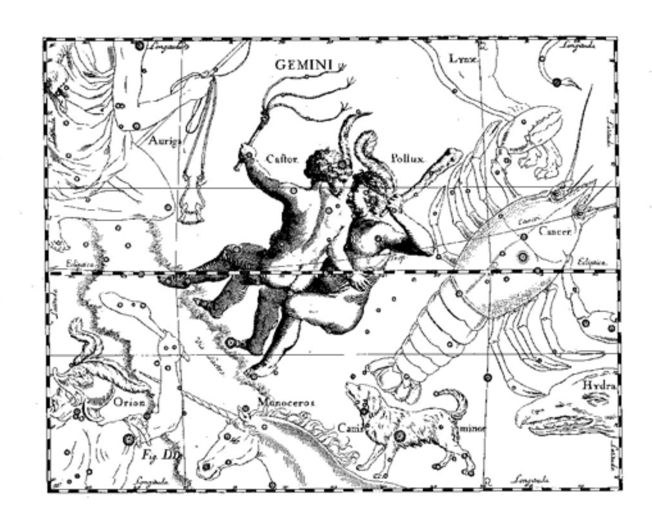



Localizado cerca de Orión, Taurus es una notable constelación que contiene dos de los cúmulos estelares visibles más grandes y emblemáticos del cielo, las Hyades y las Pléyades. Desde la época de los caldeos, hace cinco mil años, esta constelación ha sido considerada como un toro.

Los toros han sido usualmente considerados como objetos de culto y adoración como símbolos de fuerza y de fertilidad. Su presencia en leyendas y representaciones es constante, desde los antiguos egipcios que adoraron a Apis, el Toro de Menfis, un toro real considerado la encarnación de Osiris, hasta los asirios en cuyos palacios había grabados de toros alados.

En la época clásica, los griegos creían que la constelación representaba a Zeus disfrazado como un toro. La leyenda dice que Zeus se enamoró de Europa, hija del rey de Fenicia (Agenor). Un día, jugando al borde del agua, Europa se fijó en un toro blanco y majestuoso (Zeus en forma animal), el toro se arrodilló ante ella, Europa se subió en su lomo y adornó sus cuernos con flores. Luego el toro se dirigió hacia el mar y nadó hasta Creta, donde Zeus convirtió a Europa en su pareja. En la constelación solo se representan la cabeza del toro y a veces se lo imagina como saliendo de entre las olas.

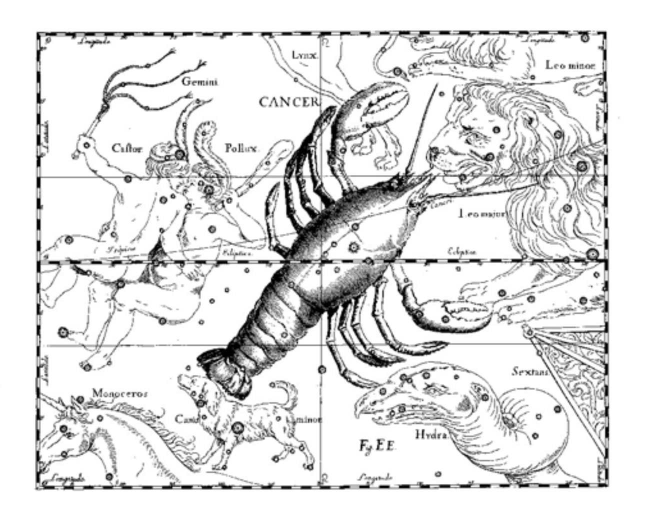
## ♊ - Gemini: Los Gemelos




Gémini es una silueta celeste familiar, y diversas culturas la han ido asociando a gemelos, dioses, hombres, animales o plantas. Los griegos llamaron a las dos estrellas más brillantes de la constelación Castor y Pollux, igual que los gemelos que salieron del cascarón de su madre Leda después de ser seducida por Zeus. Los gemelos estaban entre los héroes que navegaron con Jasón en busca del Velloncino de Oro y ayudaron a salvar el Argo del naufragio durante una tormenta, por lo que los navegantes tenían como carismática a esta constelación.

Cabe notar que William Herschel descubrió el planeta Urano cerca de la estrella Eta Geminorum en 1781, mientras que Clyde Tombaugh hizo lo propio con Plutón cerca de Delta Geminorum en 1930.

## ♋ - Cancer: El Cangrejo




En la mitología griega, Cáncer fue enviado a distraer a Hércules cuando luchaba con el monstruo Hidra. Hércules aplastó al cangrejo con su pie, pero como premio por sus esfuerzos Hera lo puso entre las estrellas. La constelación representa en

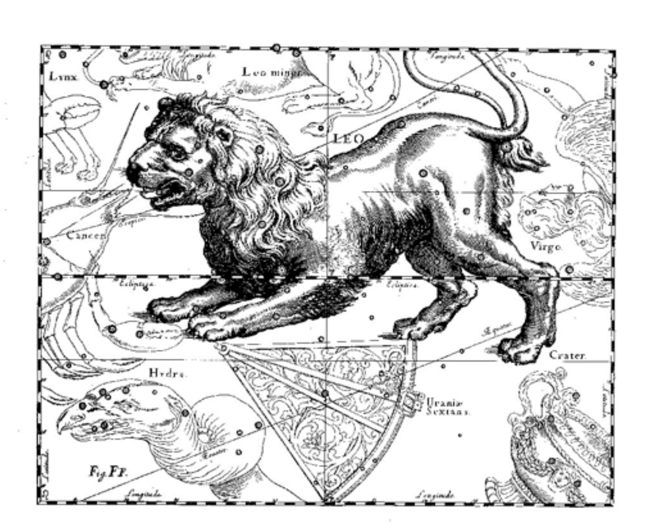
realidad solo las pinzas del cangrejo.

Hace milenios el Sol alcanzaba uno de sus solsticios (aquel en el que se encuentra en la posición más septentrional) cuando transitaba por esta constelación. En esa época del año los rayos del Sol caen en forma perpendicular sobre el Trópico de Cáncer. Actualmente, como consecuencia de la precesión, la posición más septentrional del Sol se ha movido en dirección Este, hacia el límite de las constelaciones Géminis y Tauro, aunque el trópico sigue conservando el nombre original.

Cáncer se encuentra entre Géminis y Leo. No posee ninguna estrella muy relevante a simple vista pero su fama se debe a que pertenece al zodiaco y que en ella se sitúa un cúmulo estelar muy conocido, Praesepe.

### ♌ - Leo: El León

A diferencia de la mayoría de las constelaciones del zodiaco, Leo, con la hoz (o signo de interrogación invertido) dibuja una gran cabeza. Esta puede representarse como un león sedente parecido a la esfingie egipcia.




Los babilonios y otras culturas del suroeste de Asia asociaban a Leo con el Sol, porque el solsticio de verano sucedía cuando aquél estaba en esta parte del cielo.

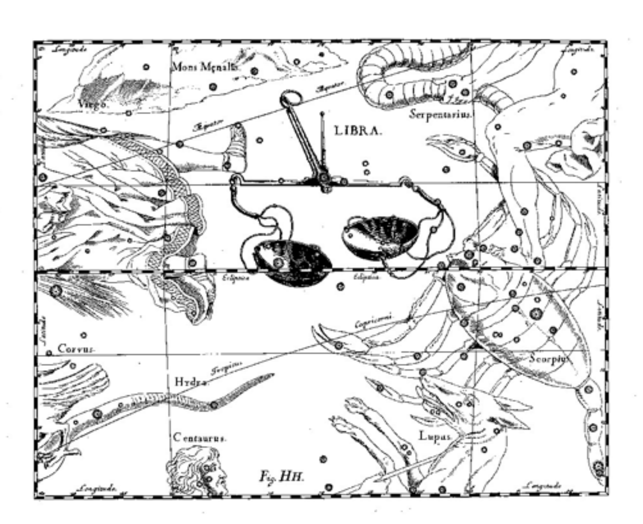
## ♍ - Virgo: La Virgen

Esta es la única figura femenina entre las constelaciones del zodiaco y ha simbolizado una extensa gama de divinidades. Entre otras, ha sido identificada con Ishtar, la diosa de la fertilidad de los babilonios; con Astrea, la diosa romana de la justicia, y con Deméter, la diosa griega de la cosecha (que tiene su contrapartida en la romana Ceres). Generalmente, Virgo aparece sosteniendo una espiga de trigo o llevando las balanzas de Libra, la constelación adyacente.



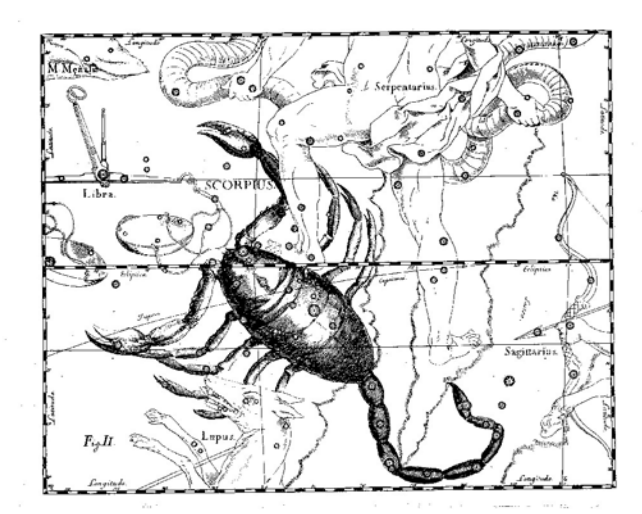

## ♎ - Libra: La Balanza

Esta constelación se la asociaba a Temis, diosa griega de la justicia. Originalmente se consideraba que esas estrellas formaban parte de la constelación de Escorpio y parece ser que se convirtió en una constelación independiente en la época de los romanos. Las dos estrellas más brillantes poseen nombres árabes, Zuben El Genubi (pinza del sur) y Zuben Eschamali (pinza del norte).



## ♏ - Scorpius: El Escorpión

En la mitología griega, Scorpius es el escorpión que mató a Orión. Simbólicamente, ambas constelaciones se encuentran en lados opuestos del cielo.

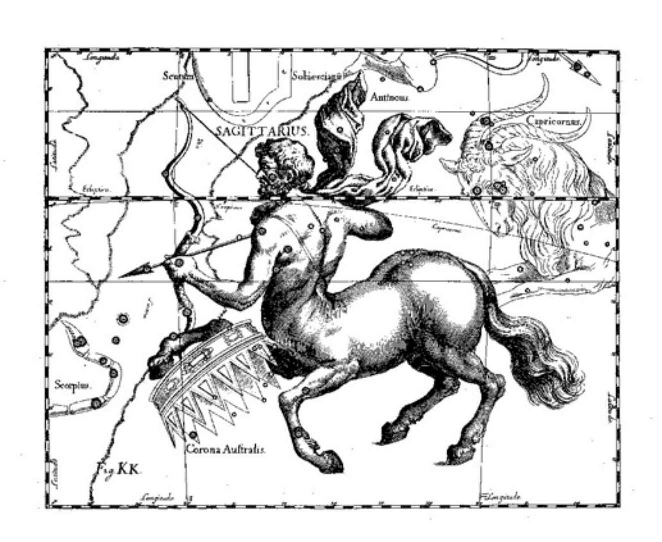



La región de Scorpius es una zona llena de estrellas brillantes y cúmulos estelares importantes. Ella representa la cabeza, cuerpo, cola y aguijón del escorpión. La cabeza se encuentra cerca del extremo norte y esta formada por una línea de tres estrellas brillantes, de las cuales la central es Antares (rival de Marte, en griego).

Hace unos 5000 años, los persas pensaban que Antares, junto a Fomalhault, era una de las estrellas reales, vigilantes del cielo. Los antiguos chinos se referían al brillo de Antares como al "Gran fuego" en el corazón del Dragón del Este. Otra leyenda china alude a Antares y a sus dos asistentes como el Ming T'ang, la "Sala de la luz" o la Sala del Consejo del Emperador".

## ♐ - Sagittarius: Sagitario

El rasgo más característico de esta constelación es el grupo de estrellas que se halla en su interior, que parece una tetera, con mango y tapa incluidos.



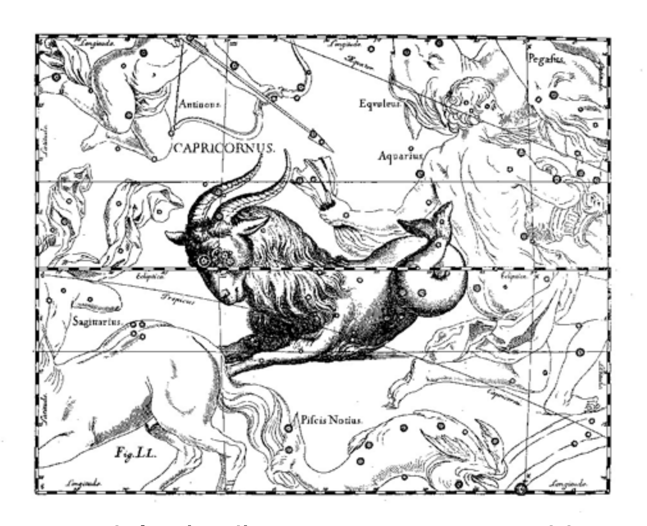
Los antiguos árabes se imaginaron en esta constelación a dos grupos de avestruces uno que iba a beber de la Vía Láctea y otro que regresaba de ella.

Generalmente, se cree que Sagitarius es un centauro (mitad hombre y mitad caballo) y se le identifica con Chiron, quien también ostenta la titularidad de la constelación Centauro. Sin embargo, Sagitarius se representa llevando un arco, lo cual no es propio de Chiron, que debía su fama más a su sabiduría y amabilidad. Algunos opinan que Chirón creó la constelación para guiar a Jasón y los Argonautas cuando navegaban en el Argo.

Sagitarius se halla en la cruzando el plano de la Vía Láctea y aparece atravesada por bandas oscuras de polvo. Esta zona posee abundandes cúmulos estelares y nebulosas.

**♑ - Capricornius: Capricornio**

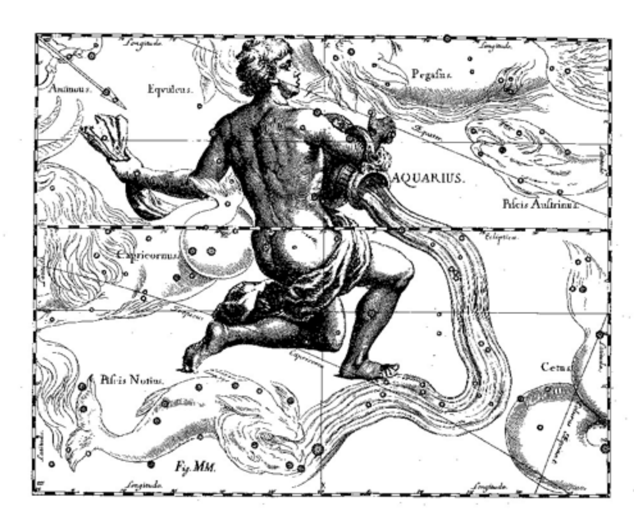
Esta constelación ha recibido el nombre de "cabra" desde los tiempos de los caldeos y los babilonios. A veces aparece como una cabra, pero generalmente se le agrega la cola de un pez. Tiene que ver con la leyenda sobre el dios Pan, quien, cuando huía del monstruo Tifón, se echó al Nilo. La parte sumergida se convirtió en la cola de pez, mientras que la superior continuó siendo cabra.




Hace miles de años, el Sol alcanzaba uno de sus solsticios (aquel en el que se encuentra en la posición más meridional) cuando transitaba por esta constelación. En esa época del año los rayos del Sol caen en forma perpendicular sobre el Trópico de Capricornio. Actualmente, este fenómeno

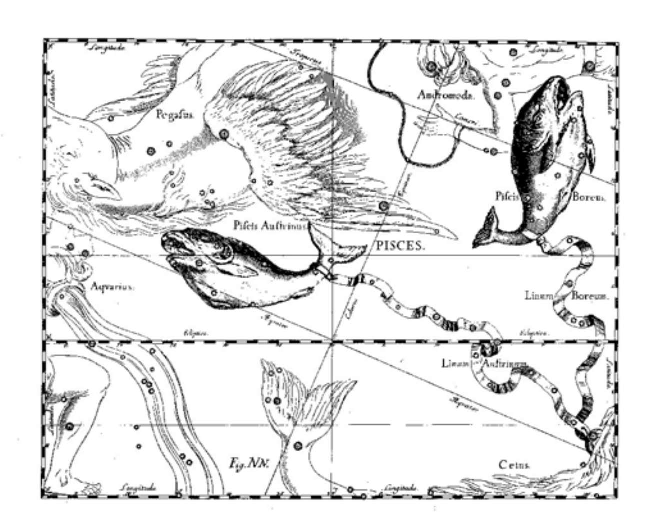
ocurre cuando el Sol se halla en la constelación de Sagitario, si bien el trópico mantiene el antiguo nombre.

### ♒ - Aquarius: El Acuario




Esta es una constelación que data de los tiempos de Babilonia y se halla situada en cielo no muy lejos de las constelaciones un delfín, un río, una serpiente marina y un pez. Entre sus muchas asociaciones mitológicas, a veces ha sido identificado con Zeus vertiendo las aguas de la vida desde los cielos.

### ♓ - Piscis: Los Peces




Durante cientos de años, esta débil constelación ha sido considerada como uno o dos peces. En la mitología grecorromana, Afrodita y su hijo Heros fueron perseguidos por el monstruo Tifón. Para escapar, se convirtieron en peces y se alejaron nadando con las colas atadas para no separarse.

El anillo de estrellas en el pez occidental, que está bajo Pegaso, se llama el Círculo. El pez oriental está bajo Andrómeda.

# BIBLIOGRAFÍA


- Bakulin P.I., Kononovich E.V. y Moroz V.I, 1983 en “Curso de Astronomía General”. Editorial Mir, Moscú

- Karttunen H., Kröger P., Oja H., Poutanen M., Donner K.J. (Eds.), 2007 en ”Fundamental Astronomy (5ta ed.)”. Editorial Springer - Verlag, Berlín

- Martín Asín F., 1990 en “Astronomía (3ra ed)”. Editorial Paraninfo, Madrid.

- Feinstein A., 1969 en “Astronomía Elemental”. Editorial Kapelusz, Bs. As.

- Feinstein A. y Tignanelli H., 1993 en “Astronomía de Posición”. Apuntes de clases teóricas de la cátedra de Astronomía General de la FCAG (UNLP)

- Parker J. y Stanton J. 2005 en "Mitologia: Todos los Mitos y leyendas del mundo", Ed. RBA Libros S.A.

- Ridpath I. y Tirion W. 1985 en “The Night Sky”. Collins Gem Guide. Ed: Collins

- Roy A.E. y Clarke D. 1978 en “Astronomy: Principles and Practice” publicado por Adam Hilger Ltd.

- Vives T.J., 1971 en “Astronomía de posición”. Editorial Alhambra, Madrid

## GUSTAVO LUIS BAUME

Títulos y estudios varios:
- Bachiller en Ciencias y Letras - Diciembre 1982 ("Instituto Padre Ansaldo", Mercedes, Bs.As.)
- Licenciado en Astronomía - Marzo 1994 (Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas - UNLP)
- Ingeniero en Electrónica - Abril 1998 (Facultad de Ingeniería - UNLP)
- Doctor en Astronomía (Especialidad Astrofísica) - Abril 1999 (Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas - UNLP)
- Varios cursos de especialización en astrofísica, ingles, computación y técnicas particulares

Antecedentes laborales
- Becario de Conicet (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología) y de la UNLP entre 1994 y 2002. Becario Postdoctoral en la Universidad de Padua (Italia) entre 2002 y 2004.
- Miembro de la Carrera de Investigador Científico de Conicet desde 2001 a la fecha perteneciendo en la actualidad a la categoría “independiente” y desarrollando actividades en el IALP (Instituto de Astrofísica de La Plata).
- Docente de la FCAG – UNLP desde 1990 a la fecha. Formando parte entre 1990 y 2006 de la cátedra de Astronomía General de la FCAG y siendo “Profesor Adjunto con dedicación exclusiva” de la cátedra Astronomía Observacional de la FCAG desde 2006 a la fecha.
- Investigador visitante en varios observatorios e institutos profesionales.
- Integrante en diferentes ocasiones de diversas comisiones de la FCAG, UNLP y del Ministerio de CyT.
- Socio activo de la AAA (Asociación Argentina de Astronomía) y miembro de la IAU (International Astronomical Union)

Antecedentes Científicos
- Integrante de varios proyectos de investigación del Conicet y de la UNLP en el área de ciencias exactas y naturales y de proyectos internacionales como VVV (Vista Variables in the Vía Láctea)
- Especialista en estudios astrofísicos utilizando técnicas fotométricas en el rango óptico e infrarrojo y procesamiento de imágenes digitales.
- Especialista en el estudio de agrupaciones estelares jóvenes y regiones de formación estelar en la Vía Láctea y en galaxias cercanas.
- Coautor de más de 40 publicaciones en revistas internacionales especializadas en astrofísica y de gran cantidad de presentaciones en congresos nacionales e internacionales de la misma especialidad.

Baume, Gustavo Luis
La esfera celeste. - 1a ed. - La Plata : Universidad Nacional de La Plata, 2014.
E-Book: ISBN 978-950-34-1089-9

1. Astronomía. 2. Esfera Celeste. 3. Movimiento Planetario. I. Título
CDD 522.7

Diseño de tapa: Dirección de Comunicación Visual de la UNLP

Universidad Nacional de La Plata – Editorial de la Universidad de La Plata
47 N.º 380 / La Plata B1900AJP / Buenos Aires, Argentina
+54 221 427 3992 / 427 4898
editorial@editorial.unlp.edu.ar
www.editorial.unlp.edu.ar

Edulp integra la Red de Editoriales Universitarias Nacionales (REUN)

Primera edición, 2014
ISBN 978-950-34-1089-9





